Аурика Луковкина

# Высшая математика. Шпаргалка

Аурика Луковкина

# Высшая математика. Шпаргалка

«Научная книга»

2009

**Луковкина А.**

Высшая математика. Шпаргалка / А. Луковкина — «Научная книга», 2009

Настоящее издание поможет систематизировать полученные ранее знания, а также подготовиться к экзамену или зачету и успешно их сдать.

# Содержание

# Высшая математика. Шпаргалка

## 1. Основные понятия. Системы координат. Прямые линии и их взаимное расположение

**Координата точки –** это величина, определяющая положение данной точки на плоскости, на прямой или кривой линии или в пространстве. Значение координаты зависит от выбора начальной точки, от выбора положительного направления и от выбора единицы масштаба.

**Прямоугольная система координат** состоит из двух взаимно перпендикулярных прямых – осей, точка их пересечения **– начало координат** *O*, ось *OX* **– ось абсцисс**, ось *OY* **– ось ординат**. На осях выбираются масштаб и положительное направление.

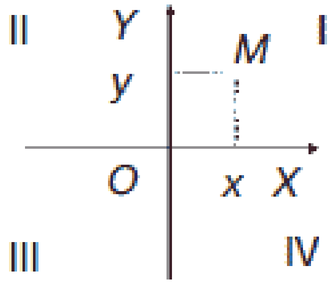


Рис. 1

**Системы координат**

Положение точки *M* определяется двумя координатами: абсциссой *x* и ординатой *y*. Записывается так: *M*(*x, y*). Оси координат образуют четыре координатных угла I, II, III, IV. Если точка находится в I координатном угле (квадранте), то и абсцисса, и ордината ее положительные, если – во II квадранте, то абсцисса отрицательна, а ордината положительна, если в – III квадранте, и абсцисса, и ордината отрицательны, если – в IV квадранте, положительна абсцисса, а ордината отрицательна. У точки, лежащей на оси ординат, абсцисса равна нулю, и наоборот, если точка лежит на оси абсцисс, то ее ордината равна нулю.

**Косоугольной системой координат** аналогична прямоугольной, только оси координат пересекаются под углом не равным прямому. Прямоугольная и косоугольная системы относятся к **декартовой системе координат**.

**Полярная система координат** состоит из полюса *O* и **полярной оси** *OX*, проведенной из полюса. Положение точки определяется полярным радиусом $\varrho$ (отрезок *OM*) и **полярным углом** $\varphi$. Для полярного угла берется его **главное значение** (от $-\pi$ до $\pi$). Числа $\varrho, \varphi$ называются **полярными координатами** точки *M*.

Связь между координатами точки в прямоугольной и полярной системах координат: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ или:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, tg\varphi = \frac{x}{y}.$$

Пусть имеются две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. **Расстояние между точками:**

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1) + (y_2 + y_1)}.$$

**Общее уравнение прямой линии** (система координат прямоугольная)*: $Ax + By + C = 0$* ($A$ и $B$ одновременно не равны нулю).

Если В не равно нулю, то уравнение прямой: $y = ax + b$ (здесь $a = -A / B$, $b = -C / B$). Здесь $a$ есть тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси абсцисс, $b$ равно длине отрезка от начала координат до точки пересечения рассматриваемой прямой с осью ординат. Уравнение прямой, параллельной оси абсцисс: $y = b$, уравнение оси абсцисс: $y = 0$; уравнение прямой, параллельной оси ординат: $x = c$, уравнение оси ординат: $x = 0$.

# 2. Условие нахождения трех точек на одной прямой. Уравнение прямой. Взаимное расположение точек и прямой. Пучок прямых. Расстояние от точки до прямой

1. Пусть даны три точки $A_1$ $(x_1, y_1)$, $A_2$ $(x_2, y_2)$, $A_3$ $(x_3, y_3)$, тогда **условие нахождения их на одной прямой**:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

либо $(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) = 0$.

2. Пусть даны две точки $A_1$ $(x_1, y_1)$, $A_2$ $(x_2, y_2)$, тогда у**равнение прямой, проходящей через эти две точки**:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x - x_1 & y - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

$(x_2 - x_1)(y - y_1) - (x - x_1)(y_2 - y_1) = 0$ или $(x - x_1) / (x_2 - x_1) = (y - y_1) / (y_2 - y_1)$.

3. Пусть имеются точка $M$ $(x_1, y_1)$ и некоторая прямая $L$, представленная уравнением $y = ax + c$. **Уравнение прямой, проходящей параллельно данной прямой $L$ через данную точку $M$:**

$y - y_1 = a(x - x_1)$.

Если прямая $L$ задана уравнением $Ax + By + C = 0$, то параллельная ей прямая, проходящая через точку $M$, описывается уравнением $A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$.

**Уравнение прямой, проходящей перпендикулярно данной прямой $L$ через данную точку $M$**:

$y - y_1 = -(x - x_1) / a$

или

$a(y - y_1) = x_1 - x$.

Если прямая $L$ задана уравнением $Ax + By + C = 0$, то параллельная ей прямая, проходящая через точку $M(x_1, y_1)$, описывается уравнением $A(y - y_1) - B(x - x_1) = 0$.

4. Пусть даны две точки $A_1$ $(x_1, y_1)$, $A_2$ $(x_2, y_2)$ и прямая, заданная уравнением $Ax + By + C = 0$. **Взаимное расположение точек относительно этой прямой:**

1) точки $A_1$, $A_2$ лежат по одну сторону от данной прямой, если выражения $(Ax_1 + By_1 + C)$ и $(Ax_2 + By_2 + C)$ имеют одинаковые знаки;

2) точки $A_1$, $A_2$ лежат по разные стороны от данной прямой, если выражения $(Ax_1 + By_1 + C)$ и $(Ax_2 + By_2 + C)$ имеют разные знаки;

3) одна или обе точки $A_1$, $A_2$ лежат на данной прямой, если одно или оба выражения соответственно $(Ax_1 + + By_1 + C)$ и $(Ax_2 + By_2 + C)$ принимают нулевое значение.

5. **Центральный пучок –** это множество прямых, проходящих через одну точку $M$ $(x_1, y_1)$, называемую **центром пучка**. Каждая из прямых пучка описывается уравнением пучка $y - y_1 = \kappa (x - x_1)$ (**параметр пучка** $\kappa$ для каждой прямой свой).

Все прямые пучка можно представить уравнением: $l(y - y_1) = m(x - x_1)$, где $l$, $m$ **–** не равные одновременно нулю произвольные числа.

Если две прямые пучка $L_1$ и $L_2$ соответственно имеют вид $(A_1x + B_1y + C_1) = 0$ и $(A_2x + B_2y + C_2) = 0$, то уравнение пучка: $m_1(A_1x + B_1y + C_1) + m_2(A_2x + B_2y + C_2) = 0$. Если прямые $L_1$ и $L_2$ пересекающиеся, то пучок центральный, если прямые параллельны, то и пучок параллельный.

6. Пусть даны точка $M$ $(x_1, y_1)$ и прямая, заданная уравнением $Ax + By + C = 0$. **Расстояние** $d$ **от** этой **точки** $M$ **до прямой**:

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|.$$

# 3. Полярные параметры прямой. Нормальное уравнение прямой. Преобразование координат

**Полярными параметрами** прямой $L$ будут **полярное расстояние** $p$ (длина перпендикуляра, проведенного к данной прямой из начала координат) и **полярный угол** $\alpha$ (угол между осью абсцисс $OX$ и перпендикуляром, опущенным из начала координат на данную прямую $L$). Для прямой, представленной уравнением $Ax + By + C = 0$: полярное расстояние

$$p = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

полярный угол $\alpha$

$$\cos\alpha = \mp\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin\alpha = \mp\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

причем при $C > 0$ берется верхний знак, при $C < 0$ – нижний знак, при $C = 0$ знаки берутся произвольно, но либо оба плюса, либо оба минуса.

**Нормальное уравнение прямой** (уравнение в полярных параметрах) (см. рис. 2): $x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0$. Пусть прямая представлена уравнением вида $Ax + By + C = 0$. Чтобы данное уравнение привести к нормальному виду необходимо последнее разделить на выражение $\mp\sqrt{A^2 + B^2}$ (знак берется в зависимости от знака $C$).

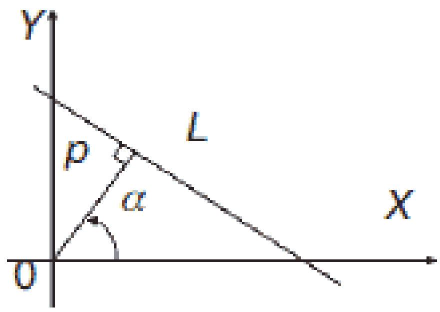


Рис. 2

После деления получается нормальное уравнение данной прямой:

$$\mp\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}x \mp \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}y - \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$

Пусть имеется прямая $L$, которая пересекает оси координат. Тогда данная прямая может быть представлена **уравнением в отрезках** $x / a + y / b = 1$. Справедливо: если прямая представлена уравнением $x / a + y / b = 1$, то она отсекает на осях отрезки $a$, $b$.

Преобразование координат возможно путем переноса начала координат, или поворотом осей координат, или совместно переносом начала и поворотом осей.

При **переносе начала координат** справедливо следующее правило: старая координата точки равна новой, сложенной с координатой нового начала в старой системе. Например, если старые координаты точки $M$ были $x$, $y$, а координаты нового начала в старой системе $O^*(x_0, y_0)$, то координаты точки $M$ в новой системе координат с началом в точке $O^*$ будут равны $x - x_0$, $y - y_0$ т. е. справедливо следующее $x = x^* + x_0$, $y = y^* + y_0$ или $x^* = x - x_0$, $y^* = y - y_0$ (* новые координаты точки).

При **повороте осей** на некоторый угол $\varphi$ справедливы следующие формулы (где $x$, $y$ – старые координаты точки; $x^*$, $y^*$ – новые координаты этой же точки):

$x = x^* \cos\alpha - y^* \sin\alpha$;

$y = x^* \sin\alpha + y^* \cos\alpha$

или

$x^* = x \cos\alpha + y \sin\alpha$;

$y^* = - x \sin\alpha + y \cos\alpha$.

# 4. Порядок алгебраических линий. Окружность. Эллипс. Гипербола. Парабола

Линия $L$, представленная в декартовой системе уравнением $n$–степени называется **алгебраической линией $n$–порядка**.

**Окружность** с радиусом $R$ и центром в начале координат описывается уравнением: $x^2 + y^2 = R^2$, если центром окружности является некоторая точка $C (a, b)$, то уравнением:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

Чтобы уравнение $Ax^2 + Bx + Ay^2 + Cy + D = 0$ описывало окружность, необходимо, чтобы оно не содержало члена с произведением $xy$, чтобы коэффициенты при $x^2$ и $y^2$ были равны, чтобы $B^2 + C^2 - 4AD > 0$ (при невыполнении данного неравенства уравнение не представляет никакой линии).

Координаты центра окружности, описанной уравнением $Ax^2 + Bx + Ay^2 + Cy + D = 0$ и ее радиус: $a = -B / 2A$, $b = -C / 2A$, $R^2 = (B^2 + C^2 - 4AD) / 4A^2$.

**Эллипс –** сжатая окружность (рис. 3).

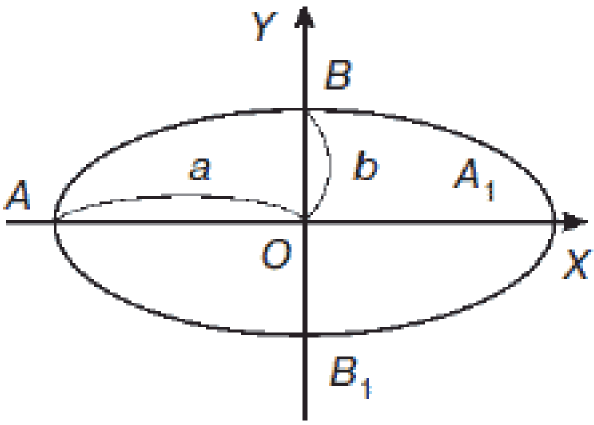


Рис. 3

Прямая $AA_1$ называется **осью сжатия**, отрезок $AA_1 = 2a$ **– большой осью эллипса,** отрезок $BB_1 = 2b$ **– малой осью эллипса** ($a > b$) точка $O$ **– центром эллипса**, точки $A$, $A_1$, $B$, $B_1$ **– вершинами эллипса**. Отношение $k = b / a$ **коэффициент сжатия** величина $\alpha = 1 - k = (a - b) / a$ **– сжатие эллипса**. Эллипс обладает симметрией относительно большой и малой осей и относительно своего центра.

**Каноническое уравнение эллипса**: $x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1$.

**Другое определение эллипса:** эллипс есть геометрическое место точек ($M$), сумма расстояний которых до двух данных точек $F$, $F_1$ имеет одно и то же значение $2a$ ($F_1M + FM = 2a$) (рис. 4).

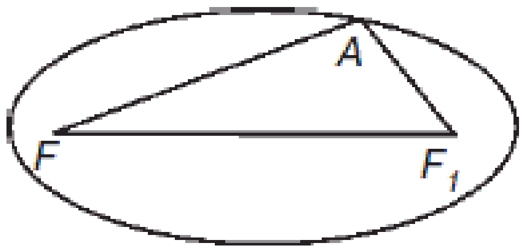


Рис. 4

Точки $F$ и $F_1$ называются **фокусами эллипса**, а отрезок $FF_1$ – **фокусным расстоянием**, обозначается $FF_1 = 2c$, причем $c < a$. Эксцентриситет эллипса $\varepsilon$ – это отношение фокусного расстояния к большой оси $\varepsilon = c / a$. Эксцентриситет эллипса меньше единицы, имеем: $k^2 = 1 - \varepsilon^2$.

**Гипербола** – это геометрическое место точек, разность расстояний которых до двух данных точек $F$, $F_1$ имеет одно и то же абсолютное значение (рис. 5). $|F_1M - FM| = 2a$. Точки $F$, $F_1$ называются **фокусами гиперболы**, расстояние $FF_1 = 2c$ – **фокусным расстоянием**. Справедливо: $c > a$.

**Каноническое уравнение гиперболы:** $x^2 / a^2 + y^2 / (a^2 - c^2) = 1$. Асимптоты гиперболы заданы уравнениями $y = bx / a$ и $y = - bx / a$ ($b^2 = c^2 - a^2$).

**Парабола** – это геометрическое место точек равноудаленных от данной точки F **(фокуса параболы)** и данной прямой $PQ$ (**директрисы параболы**). Расстояние от фокуса до директрисы $FC$ называется **параметром параболы** и обозначается $p$. Вершина параболы – точка $O$. Каноническое уравнение параболы: $y^2 = 2px$.

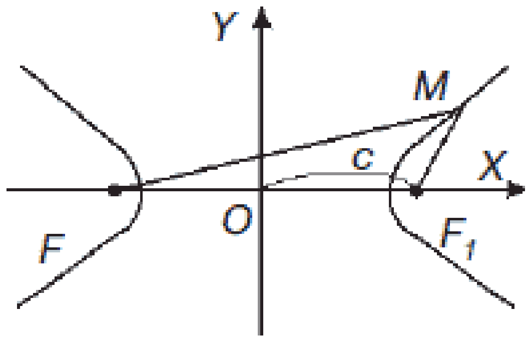


Рис. 5

# 5. Аналитическая геометрия в пространстве. Плоскость

Всякая поверхность в пространстве определяется уравнением вида $f(x, y, z) = 0$.

**Общее уравнение плоскости:** $Ax + By + Cz + D = 0$. Если $A, B, C, D$ не равны нулю, то уравнение называется **полным**.

При $D = 0$ уравнение $Ax + By + Cz = 0$ определяет плоскость, проходящую через начало координат.

Если $A = 0$, то уравнение определяет плоскость, параллельную оси $Ox$. Если два из коэффициентов $A, B, C$ равны нулю одновременно, то уравнение определяет плоскость, параллельную одной из координатных плоскостей: при $A = 0$ и $B = 0$ параллельно плоскости $xOy$, при $A = 0$ и $C = 0$ параллельно $xOz$, при $B = 0$ и $C = 0$ параллельно $yOz$. Уравнение $Cz = 0$ определяет плоскость $xOy$, $By = 0$ – плоскость $xOz$, $Ax = 0$ – плоскость $yOz$. Уравнение плоскости в «отрезках»: $x / a + y / b + z / c = 1$. Расстояние от точки $M (x_1, y_1, z_1)$ до плоскости:

$$d = \frac{\left|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Пусть имеются две плоскости $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Угол $\varphi$ между этими плоскостями:

$$\cos\varphi = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Условие равенства двух плоскостей: $A_1 / A_2 = B_1 / B_2 = C_1 / C_2 = D_1 / D_2$. Условие параллельности плоскостей: $A_1 / A_2 = B_1 / B_2 = C_1 / C_2$. Условие перпендикулярности плоскостей: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M (x_1, y_1, z_1)$ параллельно плоскости, заданной уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$: $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) + D = 0$. Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1 (x_1, y_1, z_1)$, $M_2 (x_2, y_2, z_2)$, $M_3 (x_3, y_3, z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ x - x_3 & y - y_3 & z - z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение плоскости, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ перпендикулярно к плоскости, заданной уравнением $A_x + B_y + C_z + D = 0$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1$ ($x_1$, $y_1$, $z_1$) перпендикулярно двум непараллельным плоскостям $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Имеем три плоскости, заданные общими уравнениями:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0; \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \end{cases}$$

# 6. Прямая в пространстве

Всякая прямая определяется в пространстве системой двух уравнений

$$\begin{cases} f_1(x,y,z)=0; \\ f_2(x,y,z)=0. \end{cases}$$

**Канонические (симметричные) уравнения прямой:** $(x - x_0) / m = (y - y_0) / p = (z - z_0) / q$, прямая проходит через точку $M_0$ $(x_0, y_0, z_0)$. Угол $\varphi$ между двумя прямыми, заданными каноническими уравнениями:

$$\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + p_1 p_2 + q_1 q_2}{\sqrt{m_1^2 + p_1^2 + q_1^2}\sqrt{m_2^2 + p_2^2 + q_2^2}}.$$

Условие параллельности двух прямых: $m_1 / m_2 = p_1 / p_2 = q_1 / q_2$. Условие перпендикулярности двух прямых: $m_1 m_2 + p_1 p_2 + q_1 q_2 = 0$.

Пусть имеются прямая $(x - x_0) / m = (y - y_0) / p = (z - z_0) / q$ и плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$. Условие параллельности прямой и плоскости: $Am + Bp + Cq = 0$. Условие перпендикулярности прямой и плоскости: $A / m = B / p = C / q$. Условие принадлежности прямой плоскости:

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0; \\ Am + Bp + Cq = 0 \end{cases}$$

Если прямая задана параметрически $x$

# Конец ознакомительного фрагмента.