

ВЛАДИМИР УСПЕНСКИЙ

ЛАУРЕАТ ПРЕМИИ
«ПРОСВЕТИТЕЛЬ»



АПОЛОГИЯ
МАТЕМАТИКИ

АНО
АЛЬПИНА НОН-ФИКШН

ОБНОВЛЁННОЕ
И ДОПОЛНЕННОЕ ИЗДАНИЕ

Владимир Андреевич Успенский

Апология математики

(сборник статей)

Текст предоставлен правообладателем

http://www.litres.ru/pages/biblio_book/?art=11646397

Апология математики: [сборник статей] / Владимир Андреевич

Успенский: Альпина нон-фикшн; Москва; 2017

ISBN 978-5-9614-4950-1

Аннотация

В этот сборник вошли статьи разных лет российского математика и лингвиста Владимира Андреевича Успенского, ученика великого Колмогорова, существенно переработанные и дополненные. Очерчивая место математики в современной культуре, автор пытается прояснить для читателей-нематематиков некоторые основные понятия и проблемы «царицы наук».

Содержание

Предисловие ко второму изданию	8
Предисловие к первому изданию	10
Из предисловия к сборнику переводов «Математика в современном мире»	13
Математическое и гуманитарное: преодоление барьера	24
Конец ознакомительного фрагмента.	91

В. А. Успенский
Апология математики
(сборник статей)

Владимир Андреевич
УСПЕНСКИЙ

АПОЛОГИЯ МАТЕМАТИКИ

*Обновлённое
и дополненное издание*

Редактор *Маргарита Савина*
Руководитель проекта *А. Шувалова*
Корректор *Е. Аксёнова*
Компьютерная верстка *М. Поташкин*
Дизайн обложки *Ю. Буга*
Иллюстрация на обложке *shutterstock.com*

© Успенский В., 2017

© Издание на русском языке, оформление. ООО «Альпина нон-фикшн», 2017

Все права защищены. Произведение предназначено исключительно для частного использования. Никакая часть электронного экземпляра данной книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, включая размещение в сети Интернет и в корпоративных сетях, для публичного или коллективного использования без письменного разрешения владельца авторских прав. За нарушение авторских прав законодательством предусмотрена выплата компенсации правообладателя в размере до 5 млн. рублей (ст. 49 ЗОАП), а также уголовная ответственность в виде лишения свободы на срок до 6 лет (ст. 146 УК РФ).

* * *

Предисловие ко второму изданию

Любезного читателя, купившего, укравшего, одолжившего, взявшего в библиотеке или иным способом получившего в постоянное или временное владение настоящую книгу, прошу прочесть предисловие к первому изданию. Оно идёт сразу вслед за этим предисловием.

Но ведь читатель сначала должен решить, стоит ли ему хотя бы фрагментарно читать настоящую книгу. Поэтому сообщая, на кого она рассчитана. **Настоящая книга рассчитана на образованных дилетантов.**

Приятно отметить, что ошибку в одном из чертежей первого тиража первого издания указал мне вовсе не математик, а лингвист доктор филологических наук Анатолий Фёдорович Журавлёв.

Книга не вышла бы в свет, если бы этого не пожелало издательство «Альпина нон-фикшн». Приношу глубокую признательность этому издательству в лице тех, чьё содействие я ощутил.

Это генеральный директор Павел Дмитриевич Подкосов. Именно он позвонил мне и предложил переиздать «Апологию математики». Он пошёл мне навстречу в важном для меня вопросе: сделать исключение из стандартов издательства и использовать букву ё с двумя диакритическими точками. Личное общение с ним было приятным и полезным.

Это менеджер проектов Александра Михайловна Шувалова. С ней я вёл постоянную переписку. Она взяла на себя труд быть посредником между автором и генеральным директором, а также между автором и редактором книги.

Это редактор книги Маргарита Евгеньевна Савина. Не будучи математиком, она провела героическую работу по редактированию книги хотя и популярной, но всё же математической. Более того, она поправила некоторые формулы в этой книге.

Предисловие к первому изданию

Редкий читатель добирается до середины предисловия, поэтому главное следует сказать в начале. В тексте этого сборника наряду со всем знакомыми кавычками-ёлочками и кавычками-лапками применяются *одинарные* кавычки. Они называются также *марровскими*. Закрывающая марровская кавычка имеет вид запятой, поднятой на верхнюю линию шрифта (иногда опрокинутой «вниз головой» и одновременно зеркально отражённой). Открывающая марровская кавычка также выглядит как поднятая запятая, но непременно либо отражённая, либо опрокинутая. Марровские кавычки применяются для обозначений понятий и смыслов, то есть тех абстрактных сущностей, которые есть лишь в нашем сознании. Надеюсь, что всё станет ясным из двух приводимых ниже примеров.

1. Фразу *Слово «число» выражает понятие числа* можно записать так: *Слово «число» выражает понятие 'число'*.

2. Фразу *Смысл предложения «Петя съел яблоко» состоит в том, что Петя съел яблоко* можно записать так: *Смысл предложения «Петя съел яблоко» есть 'Петя съел яблоко'*.

Пропуски в цитатах обозначены многоточием, заключённым в квадратные скобки [...], чтобы читатель не путал его с многоточием, употреблённым автором цитаты.

В сборник вошли девять текстов, написанных автором в разное время, с 1965 по 2008 г. Все они были в своё время опубликованы¹. Однако при подготовке сборника тексты подвергались переработке, иногда минимальной, а иногда довольно существенной. Наилучший способ получить представление об их тематике – заглянуть в содержание; все они в той или иной степени относятся (или хотя бы примыкают) к не имеющей чётких границ области знания, которую одни именуют *философией математики*, другие – *основаниями математики*, третьи – ещё как-нибудь. К этой же области принадлежат работы А. Н. Колмогорова и П. К. Рашевского, включённые в сборник в качестве приложений I и II. Автор имел честь быть учеником А. Н. Колмогорова и слушать лекции П. К. Рашевского во время учёбы в Московском университете.

Сочиняя включённые в сборник тексты, автор если кого и видел в качестве читателя, то отнюдь не профессионального математика. Уж скорее (в большинстве случаев) гуманитария. Правильнее всего будет сказать, что книга рассчитана на образованного дилетанта. Приходилось поэтому выбирать между понятностью и точностью. Предпочтение отдавалось понятности. (За неточности прошу прощения у коллег-математиков. Достигнуть абсолютной точности всё равно невозможно. Как, впрочем, и абсолютной понятности – вообще

¹ Сведения о предыдущих публикациях приведены в конце настоящего издания.

чего-либо абсолютного.) Тем не менее читателю-нематематику отдельные места могут показаться трудными для восприятия. Возможно также, что некоторую сообщаемую автором информацию он сочтёт избыточной, утяжеляющей чтение. Что ж, такие места автор советует пропускать, как и всё, что читатель посчитает неинтересным.

Должен также заметить, что отдельные сюжеты и даже рисунки повторяются в тексте сборника (но не в пределах одной и той же статьи). Вызвано это стремлением к тому, чтобы каждую статью можно было читать как отдельное произведение, не обращаясь к другим статьям сборника. В большинстве случаев независимо друг от друга можно читать и разделы статей.

Хотел бы выразить глубокую благодарность заместителю главного редактора издательства «Амфора» Елене Сергеевне Суворовой, которая способствовала выходу в свет этой книги, и Татьяне Германовне Филатовой, которая эту книгу редактировала. Работать с ними было приятно.

Из предисловия к сборнику переводов «Математика в современном мире»

Современный мир неожиданно обнаружил, что математика уверенно расположилась в самых разных его частях и уголках². Несмотря на то что вторжение математики продолжается – и со всё возрастающей интенсивностью, – удивление по этому поводу скорее даже убывает: математическая экспансия стала привычной. Сейчас уже все смирились со словосочетаниями «математическая биология», «математическая лингвистика», «математическая экономика», «математическая психология»; и какую дисциплину ни возьми, вряд ли кому-нибудь покажется невозможным присоединение к её наименованию эпитета «математический».

Распространение математики вширь сопровождается её проникновением вглубь; математика занимает теперь видное положение в жизни общества. Изменилось и традиционное представление о математиках: место паганелеобразных чудаков заняли молодые люди в ковбойках, увлекающиеся лыжным спортом. Всё большее число родителей желает определить своих детей в школы с математическим уклоном:

² Прошу читателя иметь в виду, что этот текст впервые был опубликован в 1967 г. К этому периоду и следует относить слово «современный».

математика стала модной профессией.

Исчерпывающие причины такого стремительного (в течение последних 10–15 лет) изменения роли математики в современном мире, конечно, легче будет установить будущим историкам науки, чем нам, наблюдающим его сегодня. Однако уже сейчас можно, пожалуй, сказать, что основная причина заключается не только и не столько в конкретных успехах последних лет, сколько в осознании необъятных возможностей применения математики и появлении возросших потребностей в использовании этих возможностей.

Тем не менее повсеместное проникновение математики некоторым кажется загадочным, а некоторым – подозрительным. В самом деле, не вызывает сомнений право на всеобщее признание, скажем, физики или химии: физика открывает нам новые мощные источники энергии и новые средства быстрой связи, химия создаёт искусственные ткани, а сейчас покусается и на создание искусственной пищи. (Сказанное не претендует, разумеется, на какое-либо определение и тем более ограничение роли физики и химии.) Неудивительно, что эти науки, помогающие человеку в его извечных поисках еды, одежды, источников силы и способов связи, прочно вошли в нашу жизнь, заняв в ней почётное место. А ведь математика проникла даже в науки, традиционно считающиеся гуманитарными. И хотя, например, в языкознании пользуются физическими приборами для исследования устной речи, никто не говорит о «физической лингвистике».

Так что же даёт людям математика, теоретическая наука, которая не открывает ни новых веществ, как химия, ни новых средств перемещения предметов или передачи сигналов, как физика? И почему появление в какой-либо отрасли науки математических методов исследования или хотя бы просто математического осмысления соответствующей системы понятий и фактов всегда означает достижение этой отраслью определённого уровня зрелости и начало нового этапа в её дальнейшем развитии? Наиболее распространённый в недавнем прошлом ответ состоял в том, что математика умеет хорошо вычислять и тем самым позволяет находить в нужных случаях требуемые цифровые данные. Однако при всей важности вычислительного аспекта математики – и особенно в последние годы, ознаменованные столь бурным развитием вычислительной техники, – этот аспект оказывается и второстепенным, и вторичным при попытке объяснить причины математизации современного мира.

Любая попытка дать краткое объяснение этих причин неизбежно приведёт к неполной и неточной формулировке. Если всё же заранее согласиться на это, то можно сказать следующее: математика предлагает весьма общие и достаточно чёткие модели для изучения окружающей действительности, в отличие от менее общих и более расплывчатых моделей, предлагаемых другими науками; действительность же так усложнилась (как за счёт познания новых её сторон, так и за счёт создания человеком новых её форм), что без упроща-

ющих, огрубляющих, формализующих, охватывающих лишь одну сторону явления моделей ныне не обойтись. Появление таких моделей в какой-либо отрасли науки свидетельствует о том, что система понятий этой отрасли уточнилась настолько, что может быть подвергнута строгому и абстрактному, т. е. математическому, изучению. Такое изучение, в свою очередь, играет решающую роль в дальнейшем уточнении понятий, а следовательно, и в успешном их применении. Математическая модель нередко задаётся в виде особого «языка», предназначенного для описания тех или иных явлений. Именно так, в виде языка, возникли в XVII в. дифференциальное и интегральное исчисления. Важнейшим примером математического языка, описывающего количественную сторону явлений, служит «язык цифр»; вот почему упомянутый выше вычислительный аспект математики как производный от её основного языкового аспекта мы назвали вторичным. Замечательно, что, хотя математическая модель создаётся человеческим разумом, она, будучи создана, может стать предметом объективного изучения; познавая её свойства, мы тем самым познаём и свойства отражённой моделью реальности.

Сказанным обусловлен и специфический характер математических открытий. Естественно-научные открытия обнаруживают ранее неизвестные свойства окружающего мира. Математические же открытия обнаруживают ранее неизвестные свойства рассматриваемых моделей мира, а наибо-

лее революционные открытия дают начало новым моделям. Так, поистине революционный характер носило осознание древними бесконечности натурального ряда, а точнее, создание такого понятия натурального числа (такой модели), при котором натуральных чисел оказывалось бесконечно много (ведь представление, что числовой ряд обрывается, скажем, на миллиарде, вряд ли могло быть опровергнуто прямым наблюдением). Возникнув как инструмент исследования мира, понятие натурального числа само стало предметом исследований, приведших к выявлению скрытых, но объективных свойств этого понятия. Поразительным достижением античной математики было, например, установление бесконечности множества³ простых чисел – поразительным как по постановке вопроса о бесконечности, хотя и без употребления самого слова «бесконечность», так и по безукоризненной точности формулировки ответа (как гласит 20-е предложение книги IX Евклидовых «Начал», «простых чисел существует больше всякого предложенного количества простых чисел») и по неожиданной простоте доказательства. Точно так же принятая нами геометрическая картина мира неизбежно приводит к существованию несоизмеримых отрезков, потрясшему ещё пифагорейцев.

Появление новых моделей нередко означает принципиальный поворот в развитии математики. Один из таких переломных моментов связан с величайшими достижениями ма-

³ Множество – принятый в математике синоним слова «совокупность».

тематической мысли прошлого века – открытием неевклидовой геометрии (правильнее сказать, «неевклидовых геометрий») и возникновением теории бесконечных множеств. Открытие неевклидовых геометрий знаменовало начало новой эры в математике: впервые было обнаружено, что одну и ту же сторону реального мира (в данном случае – его геометрическую структуру) можно отразить различными моделями, одинаково хорошо согласующимися с действительностью при определённых возможностях экспериментальной проверки. Теория множеств Г. Кантора продемонстрировала возможность строгого изучения бесконечности; она распространила на бесконечные совокупности понятие количества, замкнутое до того времени в рамки понятия натурального числа; оказалось, что не только конечные, но и бесконечные совокупности могут состоять из разного количества элементов.

Теория множеств дала универсальную систему понятий, которая охватила все существовавшие к тому времени математические теории. Вместе с тем при дальнейшем развитии теории множеств появились существенные трудности, не преодоленные полностью до сих пор. Исследования последних лет дают основания считать, что созданная Кантором «наивная теория множеств» описывает на самом деле не одну, а сразу несколько теоретико-множественных моделей, так что факты, верные в одной модели, могут быть неверны

в другой⁴. Если это так (а по-видимому, это действительно так), то «наивная теория множеств» расщепится на несколько моделей, подобно тому как основанная на непосредственных пространственных представлениях «наглядная» геометрия расщепилась в XIX в. на евклидову и неевклидовы. Подобное расщепление моделей происходит, пожалуй, всё же реже, чем обратный процесс, приводящий к возникновению на основе нескольких моделей одной обобщающей сверхмодели; именно так, путём отвлечения от частных, возникают алгебраические понятия кольца, поля, группы, структуры и даже поглощающее их все понятие универсальной алгебры.

Мы видим, что модель Кантора оказывается недостаточно чёткой, а ведь выше говорилось именно о достаточной чёткости как о характерной черте математических моделей. Дело в том, что само понятие достаточной чёткости не абсолютно, а исторически обусловлено. Определения, открывающие собой евклидовы «Начала»: «Точка есть то, что не имеет частей», «Линия же – длина без ширины» и т. д., казались, вероятно, достаточно чёткими современникам Евклида (III в. до н. э.), а непреложность его системы в целом не подвергалась публичным сомнениям вплоть до 11 (23) февраля 1826 г., когда Н. И. Лобачевский сделал сообщение в

⁴ На первый взгляд кажется непостижимым, что у такого «наглядного понятия», как совокупность, могут быть разные математические модели; но ведь в прошлом веке, да и сейчас ещё, многим было столь же непонятно, что возможны различные математические модели «наглядного» представления о расположении прямых на плоскости.

отделении физико-математических наук Казанского университета. Зато именно сомнения в этой непреложности и привели в конечном счёте к современной (достаточно чёткой на сегодняшний день) формулировке евклидовой системы геометрии.

Итак, действительное значение математической строгости не следует преувеличивать и доводить до абсурда; здравый смысл в математике не менее уместен, чем во всякой другой науке. Более того, во все времена крупные математические идеи опережали господствующие стандарты строгости. Так было с великим открытием XVII в. – созданием основ анализа бесконечно малых (т. е. основ дифференциального и интегрального исчисления) Ньютоном и Лейбницем. Введённое ими в обиход понятие бесконечно малой определялось весьма туманно и казалось загадочным современникам (в том числе, по-видимому, и самим его авторам). Тем не менее оно с успехом использовалось в математике. Разработанный Ньютоном и Лейбницем символический язык не имел точной семантики (которая в удовлетворяющей нас сейчас форме была найдена лишь через полтора столетия), но даже и в таком виде позволял описывать и исследовать важнейшие явления действительности. Так было и с такими фундаментальными понятиями математики, как предел, вероятность, алгоритм, которыми пользовались, не дожидаясь их уточнения. Так обстоит дело и с «самым главным» понятием математики – понятием доказательства. «Со времён гре-

ков говорить "математика" – значит говорить "доказательство"» – этими словами открывается знаменитый трактат Николая Бурбаки «Начала математики»⁵. Однако читатель заметит, что знакомое ему ещё со школы понятие доказательства носит скорее психологический, чем математический характер. Доказательство (в общепринятом употреблении этого слова) – это всего лишь рассуждение, которое должно убедить нас настолько, что мы сами готовы убеждать с его помощью других. Несомненно, что уточнение этого понятия (во всей полноте его объёма) – одна из важнейших задач математики.

Трудовые будни математики по необходимости состоят в получении новых теорем, открывающих новые связи между известными понятиями (хотя и теперь ещё приходится слышать – правда, всё реже – удивлённое: «Как? Неужели ещё не всё открыто в этой вашей математике?»). Однако к этому математика отнюдь не сводится. Вот какие цели математического исследования считает важными великий математик А. Н. Колмогоров:

1. Привести общие логические основы современной математики в такое состояние, чтобы их можно было излагать в школе подросткам 14–15 лет.

2. Уничтожить расхождение между «строгими» методами чистых математиков и «нестрогими» приёмами математических рассуждений, применяемых прикладными математика-

⁵ Бурбаки Н. Теория множеств. М., 1965. С. 23.

ми, физиками и техниками.

Две сформулированные задачи тесно связаны между собой. По поводу второй замечу, что, в отличие от времён создания Ньютоном и Лейбницем дифференциального и интегрального исчисления, математики умеют сейчас без большого промедления подводить фундамент логически безукоризненных математических построений под любые методы расчёта, родившиеся из живой физической и технической интуиции и оправдывающие себя на практике. Но фундамент этот иногда оказывается столь хитро построенным, что молодые математики, гордые пониманием его устройства, принимают фундамент за всё здание. Физики же и инженеры, будучи не в силах в нём разобраться, изготавливают для себя вместо него временные шаткие подмости⁶.

Непрерывное повышение уровня математической строгости одновременно с попытками представить самые сложные построения так, чтобы они стали интуитивно понятными, возникновение одних понятий и уточнение других, переставших удовлетворять новым требованиям, расщепление казавшихся ещё недавно незыблемыми моделей и образование новых обобщающих моделей – весь этот исполненный большого внутреннего драматизма процесс характерен для математики не менее, чем доказательство теорем (без которого, впрочем, описанный процесс был бы совершенно бес-

⁶ Колмогоров А. Н. Простоту – сложному // Известия. 1962. 31 дек.

содержателен, да и вообще не мог бы иметь места).

Математика подобна искусству – и не потому, что она представляет собой «искусство вычислять» или «искусство доказывать», а потому, что математика, как и искусство, – это особый способ познания. Имеет, быть может, смысл по аналогии с художественными образами говорить о математических образах как специфической для математики форме отражения действительности.

Математическое и гуманитарное: преодоление барьера

Поверх барьеров.
Борис Пастернак

*Уточняйте значения слов. Тогда человечество
избавится от большей части своих заблуждений.*
Рене Декарт

*«Да, мой голубчик, – ухо вянет:
Такую, право, порешь чушь!»
И в глазках крошечных проглянет
Математическая сушь.*
Андрей Белый. Первое свидание

*Чем дальше, тем Белому становилось яснее...
что искусство и философия требуют примирения
с точными знаниями – «иначе и жить нельзя». <...>
Недаром прежде, чем поступить на филологический
факультет, он окончил математический.*
Владислав Ходасевич

I

Никто не знает, сохранят ли грядущие века и тысячеле-

тия сегодняшнее деление наук на естественные и гуманитарные. Но даже и сегодня безоговорочное отнесение математики к естественным наукам вызывает серьёзные возражения. Естественно-научная, прежде всего физическая, составляющая математики очевидна, и нередко приходится слышать, что математика – это часть физики, поскольку она, математика, описывает свойства внешнего, физического мира. Но с тем же успехом её можно считать частью психологии, поскольку изучаемые в ней абстракции суть явления нашего мышления, а значит, должны проходить по ведомству психологии. Не менее очевидна и логическая, приближающаяся к философской, составляющая математики. Скажем, знаменитую теорему Гёделя о неполноте, гласящую, что, какие способы доказывания ни установи, всегда найдётся истинное, но не доказуемое утверждение – причём даже среди утверждений о таких, казалось бы, простых объектах, как натуральные числа, – эту теорему с полным основанием можно считать теоремой теории познания.

В 1950-х гг. по возвращении с индийских научных конференций мои московские коллеги-математики с изумлением рассказывали, что в Индии математику – при стандартном разделении наук на естественные и гуманитарные – относят к наукам гуманитарным. И на этих конференциях им приходилось сидеть рядом не с физиками, как они привыкли, а с искусствоведами. К великому сожалению, у людей гуманитарно ориентированных математика нередко вызывает

отторжение, а то и отвращение. Неуклюжее (и по содержанию, и по форме) преподавание математики в средней школе немало тому способствует.

Лет сорок назад было модно подчёркивать разницу между так называемыми *физиками* (к коим относили и математиков) и так называемыми *лириками* (к коим причисляли всех гуманитариев). Терминология эта вошла тогда в моду с лёгкой руки поэта Бориса Слуцкого, провозгласившего в 1959 г. в культовом стихотворении «Физики и лирики»:

Что-то физики в почёте,
Что-то лирики в загоне.
Дело не в сухом расчёте,
Дело в мировом законе.

Однако само противопоставление условных *физиков* условным *лирикам* вовсе не было вечным. По преданию, на воротах знаменитой Академии Платона была надпись: «Негеометр [нематематик. – В. У.] да не войдёт сюда!» С другой стороны, самоё математику можно называть младшей сестрой гуманитарной дисциплины юриспруденции: ведь именно в юридической практике Древней Греции, в дебатах на народных собраниях впервые возникло и далее шлифовалось понятие доказательства.

II

Можно ли и нужно ли уничтожать ставшие, увы, традиционными (хотя, как видим, и не столь древние!) границы между гуманитарными, естественными и математическими науками – об этом я не берусь судить. Но вот разрушить барьеры между представителями этих наук, между *лириками* и *физиками*, между гуманитариями и математиками – это представляется и привлекательным, и осуществимым. Особенно благородная цель – уничтожить этот барьер внутри отдельно взятой личности, т. е. превратить гуманитария отчасти в математика, а математика – отчасти в гуманитария. Обсуждая эту цель, полезно вспомнить некоторые факты из истории российской науки. Эти факты связаны в обратном хронологическом порядке с именами Колмогорова, Барсова и Ададурова (в другом написании – Адодурова).



Андрей Николаевич
Колмогоров

Первая научная работа великого математика Андрея Николаевича Колмогорова [12 (25) апреля 1903, Тамбов – 20 октября 1987, Москва] была посвящена отнюдь не математике, а истории. В начале 1920-х гг., будучи семнадцатилетним студентом математического отделения Московского университета, он доложил свою работу на семинаре известного московского историка Сергея Владимировича Бахрушина. Она была опубликована посмертно⁷ и чрезвычайно высоко оценена специалистами – в частности, руководителем Новгородской археологической экспедиции Валентином Лаврентьевичем Яниным. Выступая на вечере памяти Колмогорова, состоявшемся в Московском доме учёных 15 декабря 1989 г., он так охарактеризовал историческое исследование Колмогорова: «Эта юношеская работа в русле исторической науки занимает место, до которого её [исторической науки. – В. У.] развитие ещё не докатилось. Будучи опубликованной, она окажется впереди всей исторической науки». А в предисловии к вышеназванному посмертному изданию исторических рукописей Колмогорова В. Л. Янин писал: «Некоторые наблюдения А. Н. Колмогорова способны пролить свет на источники, обнаруженные много десятилетий спустя после того, как он вёл своё юношеское исследование». И там же:

Андрей Николаевич сам неоднократно рассказывал своим ученикам о конце своей «карьеры историка».

⁷ Колмогоров А. Н. Новгородское землевладение XV века. – М.: Физмат-лит, 1994.

Когда работа была доложена им в семинаре, руководитель семинара профессор С. В. Бахрушин, одобрив результаты, заметил, однако, что выводы молодого исследователя не могут претендовать на окончательность, так как «в исторической науке каждый вывод должен быть снабжён несколькими доказательствами» (!). Впоследствии, рассказывая об этом, Андрей Николаевич добавлял: «И я решил уйти в науку, в которой для окончательного вывода достаточно одного доказательства». История потеряла гениального исследователя, математика приобрела его.

Двадцать шестого апреля (по старому стилю, а по новому – 7 мая) 1755 г. состоялось торжественное открытие Московского университета. После молебна были сказаны четыре речи. Первая из них – и притом единственная прозвучавшая на русском языке – называлась «О пользе учреждения Московского университета». Произнёс её Антон Алексеевич Барсов [1 (12) марта 1730, Москва – 21 декабря 1791 (1 января 1792), там же]. Неудивительно, что в 1761 г. он был назначен профессором (в современных терминах – заведующим) на кафедру красноречия; вступление в эту должность ознаменовалось его публичной лекцией «О употреблении красноречия в Российской империи», произнесённой 31 января (11 февраля) 1761 г. Чем же занимался Барсов до того? Преподавал математику – именно с Барсова, в феврале 1755 г. специально для этой цели переведённого из Петербурга в Москву, и началось преподавание математики в Московском

университете! Впоследствии Барсов прославился трудами по русской грамматике; ему же принадлежит и ряд предложений по русской орфографии, тогда отвергнутых и принятых лишь в XX в. К сожалению, портрет А. А. Барсова не сохранился.

Ещё раньше, в 1727 г., знаменитый математик Даниил Бернулли, работавший в то время в Петербургской академии наук, обратил внимание на студента этой академии Василия Евдокимовича Ададунова [15 (26) марта 1709, Новгород – 5 (16) ноября 1780, Москва]. В письме к известному математику Христиану Гольдбаху от 28 мая 1728 г. Бернулли отмечает значительные математические способности молодого человека и сообщает о сделанном Ададуновым открытии: сумма кубов последовательных натуральных чисел равна квадрату суммы их первых степеней: $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$. Математические заслуги Ададунова засвидетельствованы включением статьи о нём (с портретом, выполненным в технике силуэта) в биографический раздел однотомного «Математического энциклопедического словаря» (М., 1988). А из статьи «Ададунов» в первом томе «Нового энциклопедического словаря» Брокгауза и Ефрона мы узнаём, что Ададуновым написано несколько сочинений по русскому языку и, более того, что «в 1744 г. ему было поручено преподавать русский язык принцессе Софии, т. е. будущей императрице Екатерине II». Последующие изыскания (они были проведены братом автора этих строк Борисом Андреевичем

Успенским) показали, что Ададуров является автором первой русской грамматики на русском же языке, составление которой следует рассматривать как большое событие. Ведь важнейший этап в языковом сознании носителей какого бы то ни было языка – появление первой грамматики этого языка на том же самом языке; этот этап сравним с осознанием того, что кажущаяся пустота вокруг нас заполнена воздухом. Прибавим ещё, что с 1762 по 1778 г. Ададуров был куратором Московского университета – вторым после основавшего университет И. И. Шувалова.



Профиль Василия
Евдокимовича Ададунова

Итак, даже если согласиться с традиционной классификацией наук, отсюда ещё не следует с неизбежностью аналогичная классификация учёных или учащихся. Приведённые факты показывают, что математик и гуманитарий способны уживаться в одном лице.

Здесь предвидятся два возражения. Прежде всего нам справедливо укажут, что Ададуrow, Барсов, Колмогоров были выдающимися личностями, в то время как любые рекомендации должны быть рассчитаны на массовую аудиторию. На это мы ответим, что образцом для подражания – даже массового подражания – как раз и должны быть выдающиеся личности и что примеры Ададуrowа, Барсова, Колмогорова призваны вдохновлять. Далее нам укажут, опять-таки справедливо, что отнюдь не всем гуманитариям и отнюдь не всем математикам суждено заниматься научной работой, это и невозможно, и не должно. Ну что ж, ответим мы, примеры из жизни больших учёных выбраны просто потому, что история нам их сохранила; сочетать же математический и гуманитарный подход к окружающему миру стоит даже тем гуманитариям и математикам, которые не собираются посвятить себя высокой науке, и это вполне посильная для них задача.

III

По всеобщему признанию, литература и искусство являются частью человеческой культуры. Ценность же математики, как правило, видят в её практических приложениях. Но наличие практических приложений не должно препятствовать тому, чтобы и математика рассматривалась как часть человеческой культуры. Да и сами эти приложения, если брать древнейшие из них – такие, скажем, как использование еги-

петского треугольника (т. е. треугольника со сторонами 3, 4, 5) для построения прямого угла, – также принадлежат общекультурной сокровищнице человечества. (Чьей сокровищнице принадлежит шестигранная форма пчелиных сот, обеспечивающая максимальную вместимость камеры при минимальном расходе воска на строительство её стен, – этот вопрос мы оставляем читателю для размышления.) В Древнем Египте, чтобы получить прямой угол, столь необходимый при строительстве пирамид и храмов, поступали следующим образом. Верёвку делили на 12 равных частей; точки деления, служащие границами между частями, помечали, а концы верёвки связывали. Затем за верёвку брались три человека, удерживая её в трёх точках, отстоящих друг от друга на 3, 4 и 5 частей деления. Далее верёвку натягивали до предела – так, чтобы получился треугольник. По теореме, обратной к теореме Пифагора, треугольник оказывался прямоугольным, причём тот человек, который стоял между частью длины 3 и частью длины 4, оказывался в вершине прямого угла этого треугольника.

Раздел математики, сейчас называемый математическим анализом, в старые годы был известен под названием «дифференциальное и интегральное исчисление». Отнюдь не всем обязательно знать точное определение таких основных понятий этого раздела, как *производная* и *интеграл*. Однако каждому образованному человеку желательно иметь представление о *производном числе* как о мгновенной скорости (а

также как об угловом коэффициенте касательной) и об *определённом интеграле* как о площади (а также как о величине пройденного пути). Поучительно знать и о знаменитых математических проблемах (разумеется, тех из них, которые имеют общедоступные формулировки) – решённых (как проблема Ферма и проблема четырёх красок⁸), ждущих решения (как проблема близнецов⁹) и тех, у которых решения заведомо отсутствуют (из числа задач на геометрическое построение и простейших задач на отыскание алгоритмов). Ясное понимание несуществования чего-либо – чисел ли с заданными свойствами, или способов построения, или алгоритмов – создаёт особый дискурс, который можно было бы назвать *культурой невозможного*. И культура невозможного, и предпринимаемые математикой попытки познания бесконечного значительно расширяют горизонты мышления.

Всё это, ломая традиционное восприятие математики как сухой цифири, создаёт образ живой области знания, причём *живой* в двух смыслах: во-первых, связанной с жизнью; во-

⁸ *Проблема четырёх красок* заключается в требовании доказать следующий факт: любую мыслимую карту можно так раскрасить в четыре цвета, чтобы страны, имеющие общую границу, всегда были окрашены в разные цвета. Проблема ждала решения более ста лет.

⁹ *Близнецами* называются такие два простых числа, разность между которыми равна двум: например, 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19, 29 и 31. Неизвестно, конечным или бесконечным является количество близнецовых пар; в требовании дать ответ на этот вопрос и состоит *проблема близнецов*. (Напомним, что *простым* называется такое большее единицы целое число, которое делится без остатка только на само себя и на единицу.)

вторых, развивающейся, т. е. продолжающей активно жить. Всякому любознательному человеку такая область знания должна быть интересна. Вообще, образованность предполагает ведь знакомство не только с тем, что непосредственно используется в профессиональной деятельности, но и с человеческой культурой как таковой, чьей неотъемлемой частью – повторим это ещё раз – является математика.

Здесь возможен следующий упрёк. Хотя в названии настоящего очерка политкорректно говорится о *преодолении барьера*, изложение явно уклоняется в сторону пропаганды «математического». Автор болезненно относится к такому упрёку и спешит оправдаться. Дело в том, что гуманитарная культура не нуждается в пропаганде: она не только повсеместно признана непременной частью культуры вообще, но часто отождествляется с последней. Отличать ямб от хоря, понимать смысл выражения «всевышней волею Зевеса», а заодно и знать, кто такой Зевес, – все (или по крайней мере большинство) согласны в том, что подобные знания и умения входят в общеобязательный культурный багаж. Включение же в этот багаж чего-то математического в качестве обязательной составной части многим может показаться непривычным и потому нуждается в лоббировании.

IV

Однако образование состоит не только в расширении кру-

га знаний. В меньшей степени оно подразумевает расширение навыков мышления. Математик и гуманитарий обладают различными стилями мышления, и ознакомление с иным стилем обогащает и того и другого. Скажем, изучение широко распространённого в математике аксиоматического метода, позволяющего использовать в рассуждениях только ту информацию, которая явно записана в аксиомах, прививает привычку к строгому мышлению. А знакомство со свойствами бесконечных множеств развивает воображение. Потребуется ли когда-нибудь, скажем, историку аксиоматический метод или бесконечные множества? Более чем сомнительно. Но вот строгость мышления и воображение не мешают и ему. С другой стороны, и математику есть чему поучиться у гуманитария. Последний более толерантен к чужому мнению, чем математик, и это говорится здесь в пользу гуманитария (разумеется, имеются в виду некоторые усреднённые – а то и воображаемые автором этих строк – гуманитарий и математик). Математические понятия резко очерчены, тогда как гуманитарные расплывчаты; и как раз эта расплывчивость делает их *более адекватными для описания окружающего нас расплывчатого мира*, поскольку его явления (или надо сказать «его феномены»?) сами расплывчаты. Математик ведь привык иметь дело с такими утверждениями, каждое из которых либо истинно, либо ложно, и эта привычка поневоле заставляет его видеть мир в чёрно-белом цвете. Его мышление настроено на более высокую

контрастность или резкость (не знаю, какое слово здесь правильное употребить). Ему, в отличие от гуманитария, чужда или непонятна мысль, что истина, может быть, и одна, но вот правда у каждого своя.

Поучительно сравнить между собой методы рассуждений, применяемые в математических и в гуманитарных науках. На самом деле речь идёт здесь о двух типах мышления, и человеку полезно познакомиться с каждым из них. Автор не берётся (потому что не умеет) описать эти типы, но попытается проиллюстрировать на двух примерах своё видение их различия.

Пример первый. Все знают, что такое вода. Это вещество с формулой H_2O . Но тогда то, что мы все пьём, не вода. Разумеется, в повседневной речи и математик, и гуманитарий и то и то называет водой, но в своих теоретических рассуждениях первый как бы тяготеет к тому, чтобы называть водой лишь H_2O , а второй – всё, что имеет вид воды. Потому что математик изучает идеальные объекты, имеющие такой же статус, как, скажем, круги и треугольники, которых нет в реальной природе; гуманитарий же изучает предметы более реалистические. Боюсь, впрочем, что этот пример слишком умозрителен и способен отчасти запутать читателя.

Вот другой, уже не умозрительный, а взятый из жизни пример. Имеется строгое (кстати, в наиболее отчётливой форме сформулированное Колмогоровым) определение того, что такое ямб. Мы имеем здесь в виду не *ямбическую*

стопу та-тА, понимание которой не вызывает затруднений, а *ямбическую строку*, которая может состоять отнюдь не из одних только ямбических стоп (как иногда ошибочно думают): любая ямбическая стопа может быть всегда заменена пиррихием та-та (здесь оба слога безударны), а в особых случаях, впервые чётко указанных Третьяковским, – и спондеем тА-тА (здесь оба слога ударны). Если в стихотворении встречается отклонение от законов, которым обязана подчиняться ямбическая строка, то, с точки зрения математика, это уже не ямб. Однако для многих филологов стихотворение, содержащее не слишком много нарушений, не перестаёт быть ямбическим – в то время как математик назовёт его всего лишь похожим на ямб, ямбоподобным.

По-видимому, математики, которых специально обучают обращению с абстракциями, начинают мыслить отчасти по-особому. Одни из них перестают это замечать и утверждают в убеждении, что так мыслят все. Другие же достаточно трезво оценивают применимость своих ограниченных представлений к реальным ситуациям и с удовольствием рассказывают анекдоты про тех, кто этой ограниченности не замечает (или не желает замечать). Вот три таких анекдота.

Жена говорит мужу-математику: «Купи батон, а если будут яйца, возьми десяток». Муж приносит десять батонов. (Действительно, сказанное женой имеет – на формальном уровне – два смысла, и муж руководствуется тем из них, который аналогичен смыслу фразы: «Купи один батон, а если

хватит денег, возьми десяток».)

Математика окликают с заплутавшего воздушного шара: «Где мы?» – «На воздушном шаре». (В другом, более просторном варианте анекдота после обмена репликами один из воздухоплатателей замечает: «Все ясно. Это математик». «С чего ты взял?» – спрашивает другой. «Он подумал, прежде чем ответить, и ответ дал совершенно точный – и совершенно бессмысленный».)

Пассажиры поезда наблюдают в окно нескончаемые стада белых овец. И вдруг замечают чёрную овцу, повернувшуюся к поезду боком. «О, здесь бывают и чёрные овцы!» – восклицает один. «По меньшей мере одна овца с по меньшей мере одним чёрным боком», – поправляет его другой, математик.

«Сказка ложь, да в ней намёк! Добрым молодцам урок». Эти анекдоты весьма поучительны: они в наглядной и сжатой форме выражают идею о том, что чрезмерная точность может быть вредной, способной мешать адекватному восприятию текста. Здесь есть основа для уважительного диалога между гуманитарием и математиком, диалога, полезного для обеих сторон. В этом диалоге математик обучает гуманитария – нет, не так, не обучает, а делится своими представлениями о том, сколь важна точность, причём не только точность выбора слов, о которой говорил ещё Декарт, процитированный нами в эпиграфе, но и точность построения синтаксических конструкций. Математик в этом диалоге пытается передать гуманитария свою способность увидеть логи-

ческий каркас текста. Гуманитарий же делится с математиком своими соображениями о важности неточности; он объясняет математику, что и «плоть» текста, облегающая его логический каркас, и контекст, в котором возникает текст, не менее существенны, чем упомянутый каркас. Окружающий мир, говорит гуманитарий, аморфен и расплывчат, и потому неточные, расплывчатые тексты и образы более приспособлены для адекватного его отражения, нежели тексты и образы математически точные.

V

Ряд положений языкознания может быть изложен с математической точностью. (А скажем, для литературоведения подобный тезис справедлив разве что в применении к стиховедению.) В то же время именно на уроках математики учащиеся могли бы приучаться правильно выражать свои мысли на родном языке. Уроки языка и уроки литературы на родном языке проводятся, как правило, одним и тем же учителем. На наш взгляд, было бы полезнее несколько отделить лингвистику от литературоведения. И уж совсем крамольная идея – объединить, хотя бы в порядке эксперимента, родной язык и математику, с тем чтобы их преподавал один и тот же учитель. Некоторые уважаемые коллеги автора этих строк нашли эту фантастическую идею ужасающей. Поэтому спешу объяснить.

Прежде всего идея эта не столько крамольная, сколько утопическая и относится к некоторому идеальному будущему. Будущее, как известно, подразделяется на обозримое и необозримое. В обозримом будущем объединение уроков языка и уроков математики нереально хотя бы потому, что учителей, способных преподавать оба этих предмета, на сегодняшний день не найдёшь. Если же говорить о будущем необозримом, то можно предполагать, что сама технология обучения в этом будущем кардинально изменится и окажется мало похожей на сегодняшнюю. Так что высказанное предложение обозначает всего лишь вектор движения, и притом движения не реальной организации образования, а мысли. Это как показ образцов высокой моды или футуристических градостроительных проектов, которые хотя и не предполагают массового тиражирования, но служат источником вдохновения для создателей реальной одежды и реальной архитектуры.

Что до движения мысли, то здесь надлежит сказать следующее. Среди многочисленных функций языка можно выделить две: передавать информацию и передавать эмоции. Разумеется, в реальной языковой практике названные функции переплетены. Тем не менее при всей их нераздельности наличествует и некая неслиянность, и можно попытаться разделить их как в обучении языку, так и в его преподавании. Функция передачи эмоций сближает язык с литературой (думается, что, когда говорят о «великом и могучем», имеют

в виду именно эту функцию). Действительно, вся стилистика, всевозможные художественные средства языка – в частности, такие локальные, как тропы (метафоры, метонимии, гиперболы и т. п.), – всё это относится столько же к ведомству лингвистики, сколько к ведомству литературоведения. Поэтому названные темы могут изучаться на лингво-литературоведческих уроках. Нас же будет интересовать функция бесстрастной передачи информации; она воплощается в текстах, которые один из основоположников отечественного программирования Андрей Петрович Ершов называл *деловой прозой*. К деловой прозе относятся, в частности, естественно-научные тексты¹⁰ (и прежде всего математические), юридические тексты, тексты делопроизводства, инструкции. Деловая проза занимает всё большее место в нашей жизни и потому должна быть предметом, которому учат в школах. Преподавать его можно было бы на уроках родного языка или же на специальных занятиях, посвященных чистой, не несущей эмоции информации.

Обучение деловой прозе призвано прививать навыки правильного составления и правильного восприятия деловых текстов, иначе говоря, умение правильно выражать мысль посредством слов и правильно интерпретировать выраженную словами мысль. Это особенно важно для понимания инструкций, ошибочная трактовка которых нередко вызывает

¹⁰ Было бы хорошо, если бы и некоторые гуманитарные тексты, в частности все тексты исторической науки, писались с такой же безоценочной бесстрашностью.

проблемы.

Проблема такого рода возникла, например, в 2008 г. на выборах в Российскую академию наук (РАН). Как известно, выборы в РАН трёхступенчатые: сперва кандидатуры соискателей рассматривает секция, затем – отделение и наконец – общее собрание академии. Проблема возникла в одном из гуманитарных отделений при выборах в секции. Мы не будем указывать ни имён, ни названий подразделений РАН, сведя всё к абстрактной задаче.

Итак, чтобы стать членом некоего общества гуманитарной направленности, надо пройти процедуру голосования на имеющиеся вакансии. Правом голоса обладают все члены общества, голосование проводится в несколько туров. Положение о выборах было написано математиками. Оно гласит:

Для избрания членом общества необходимо получить не менее $\frac{2}{3}$ голосов лиц, принявших участие в голосовании, и не менее половины от списочного состава общества. Кандидат считается избранным в данном туре голосования, если в этом туре он получил необходимое для избрания число голосов и число всех кандидатов, получивших в этом туре такое же или большее число голосов, не превышает числа вакансий по данной специальности, оставшихся незаполненными в предыдущих турах (в первом туре – числа всех имеющихся вакансий). Если в первом туре голосования число избранных кандидатов по данной специальности оказалось меньше, чем число вакансий по этой

специальности, то проводится второй тур голосования. Если по результатам первого и второго туров остались незаполненные вакансии по данной специальности, то проводится третий тур голосования.

Случилось так, что при выборах на единственную вакансию каждый из кандидатов X и Y получил во втором туре не менее $\frac{2}{3}$ голосов лиц, принявших участие в голосовании, и не менее половины списочного состава. При этом Y собрал больше голосов, чем X . Возникает три вопроса: 1) избран ли кто-нибудь в этом туре, 2) если избран, то кто и 3) надо ли проводить третий тур?

Эксперимент показал, что математики отвечают на этот вопрос, как правило, верно, тогда как гуманитарии, как правило, неверно. Верный ответ состоит в том, что X не избран, избран Y и третий тур проводить не надо. Это обосновывается следующим рассуждением. Имеются два условия избрания. Первое условие – получить необходимое количество голосов: не менее $\frac{2}{3}$ голосов участвующих в голосовании и не менее половины от списочного состава. Второе условие – количество N всех кандидатов, получивших в этом туре такое же или большее число голосов, не превышает числа P вакансий.

В нашем примере первое условие выполнено для обоих кандидатов. Посмотрим, что происходит со вторым условием. В нашем примере число вакансий $P = 1$. Для X второе условие не выполнено, поскольку для этого кандидата $N =$

2, а значит, N превышает P . Для Y второе условие выполнено, поскольку для этого кандидата $N = 1$ и, стало быть, N не превышает P .

В реальности же был проведён третий тур, в котором избранным оказался X . Напомним, что электорат состоял из гуманитариев. (Возвращаясь к реальным событиям, отметим, что через год справедливость была восстановлена и кандидат Y также стал членом Академии.)

Мораль этой истории такова: текст положения о выборах, логически и лингвистически безупречный, всё же обладает тем недостатком, что реальный гуманитарный электорат понимает его (по крайней мере отдельные его фрагменты) с трудом, или вовсе не понимает, или понимает неправильно. По-видимому, текст стоило бы переписать с учётом этого обстоятельства. Так что упрёк можно предъявить не только гуманитариям, не понявшим инструкцию, но и математикам, её составлявшим. Хотя текст инструкции безупречен с логической точки зрения и смысл его однозначен, он, этот текст, составлен без учёта возможных психологических трудностей его восприятия.

Интерпретация деловой прозы определяется главным образом трактовкой синтаксических конструкций, по-разному воспринимаемых математиками и гуманитариями. Рассмотрим два утверждения: «Каждый из присутствующих знает хотя бы один из следующих двух языков – баскского и ирокеского» и «Среди присутствующих есть некто, кто не зна-

ет ни баскского, ни ирокезского». Абсолютное большинство студентов-математиков сразу понимает, что первое из этих утверждений равносильно отрицанию второго, и наоборот. Для немалого же числа студентов-гуманитариев это не столь очевидно.

Следует, однако, подчеркнуть, что реальная фраза на естественном языке состоит не только из логического каркаса. Каркас этот облачён в мягкую (а то и пульсирующую студенистую) плоть, какова плоть весьма существенна для адекватного восприятия фразы. Что и было продемонстрировано приведёнными выше анекдотами о математиках.

VI

В последние годы получило заметное распространение преподавание математики студентам гуманитарных специальностей. И это переводит задачу постижения математиками гуманитарного образа мышления из общепhilosophической в практическую плоскость. Чтобы успешно преподавать свой предмет, математик должен понимать, как предмет этот воспринимается его учениками-гуманитариями.

Вот простой пример. Отношение называют *рефлексивным*, коль скоро всякий предмет, для которого данное отношение осмысленно, находится в этом отношении к самому себе. Пример рефлексивного отношения: 'жить в том же городе' – каждый живёт в том же городе, что он сам. (Не ис-

ключено, впрочем, что некоторые сочтут предложение «NN живёт в том же городе, что он сам» бессмысленным.) Будет ли рефлексивным отношение 'находиться неподалёку'?

Опрошенные мною математики (притом отнюдь не математические логики) отвечали, что будет: каждый предмет находится неподалёку от самого себя. Гуманитарии же – да и просто обычные люди, нематематики – в большинстве своём расценивают высказывание «Нечто находится неподалёку от самого себя» либо как ложное, либо как бессмысленное. Причина такого расхождения, надо полагать, заключается в следующем. Слово «неподалёку» означает «на малом расстоянии» (но смысл его этим не ограничивается, о чём будет сказано ниже). Математики свободно оперируют расстоянием ноль, на каком-то расстоянии любой предмет находится от самого себя. Для нематематика же, в том числе для гуманитария, нулевых расстояний не бывает.

Беседуя как-то с дамой, мастером по маникюру и педикюру, я спросил её, находится ли предмет неподалёку от самого себя. Получив, к немалому своему удивлению, положительный ответ, я справился о расстоянии между предметом и им самим и был удивлен ещё более: ответом был ноль. Тогда я поинтересовался, какое образование получила моя собеседница. Оказалось – высшее техническое по специальности «гидравлика», включая достаточно обширный курс математики. Всё стало на свои места. Даже если этот курс и не познакомил её с расстоянием ноль, преподаваемая в его рамках

общая система понятий и терминов не могла не выработать мысли о возможности такого расстояния.

Математики в большинстве своём не замечают, что слово «неподалёку» означает нечто большее, чем малость расстояния. Напомним, что отношение называется *симметричным*, коль скоро выполняется следующее условие: всякий раз, когда какой-то предмет находится в этом отношении к другому, то и этот второй предмет находится в том же отношении к первому; примеры симметричных отношений: 'жить в том же городе', 'быть родственниками'. По наблюдению автора этих строк, для большинства математиков отношение 'находиться неподалёку' является симметричным. Но анализ естественного языка показывает, что значение словосочетания «находиться неподалёку» отнюдь не симметрично. Соответствующее наблюдение сделал выдающийся американский лингвист Леонард Талми. Вот что пишет Талми по этому поводу¹¹:

Можно было бы ожидать, что такие два предложения, как

(а) *Велосипед находится неподалёку от дома;*

(б) *Дом находится неподалёку от велосипеда*¹²

будут синонимичны на том основании, что они всего навсего выражают две инверсные формы некоторого

¹¹ Talmy Leonard. Toward a Cognitive Semantics. Vol. 1. The MIT Press, 2000. P. 314. (<http://linguistics.bufile.edu/people/faculty/talmy/talmyweb/Volumel/chap5.pdf>)

¹² В оригинале: «The bike is near the house» и «The house is near the bike».

симметричного отношения. Отношение это выражает не что иное, как малость расстояния между двумя объектами. На самом же деле эти два предложения вовсе не означают одно и то же. Они были бы синонимичными, если бы выражали только указанное симметричное отношение. Однако в дополнение к этому (а) содержит не симметричное указание, что один из объектов (а именно дом) имеет местоположение [set location] в пределах некоторой рамки [reference frame] (в качестве таковой здесь подразумевается данная окрестность, весь мир и т. п.) и используется в целях сообщения о местоположении другого объекта (а именно велосипеда). Соответственно, местоположение этого другого объекта есть переменная (для рассматриваемого примера это так и есть, поскольку в разных ситуациях велосипед окажется в разных местах), чьё частное значение и составляет предмет интереса.

Что касается предложения (b), то оно содержит противоположное указание. Это указание, однако, не вписывается в привычную картину мира, вследствие чего предложение (b) выглядит странным, что ясно демонстрирует его отличие от (a).

Из разбора Талми в действительности видно, что обычный человек (в том числе гуманитарий) полнее и глубже понимает смысл русского слова «неподалёку» (а именно слышит во всей полноте заключённый в нём «семантический звук», а потому и отвергает фразу, где он прозвучать не мо-

жет), чем типичный математик. Типичный математик слышит в этом слове только те элементы, которые ему профессионально близки (да ещё зачастую учит гуманитария быть таким же полуглухим).

VII

Различие в понимании слов составляет существенную часть барьера, упомянутого в заголовке настоящего очерка. И следует признать, что подавляющая часть людей находится по ту же сторону барьера, что и гуманитарии. Честнее было бы сказать, что гуманитарии просто пользуются общепринятыми значениями слов. (Подозреваю, правда, что, когда в гуманитарном собрании звучат слова «дискурс», «парадигма», «экзистенциальный» и им подобные, затесавшийся на собрание математик получает редкую возможность насладиться своим единством с большинством человечества.) Можно выделить два фактора, вызывающие указанное различие.

Первый, очевидный, фактор состоит в том, что математики оперируют точной терминологией, а в качестве терминов нередко употребляют слова обычного языка, придавая им совершенно новый смысл. Например, слова «кольцо» и «поле» обозначают в математике алгебраические структуры определённого вида, ничего общего не имеющие с обручальными кольцами и засеянными полями. Подобные явления

следует квалифицировать как омонимию, а возможная путаница легко устраняется контекстом, и потому обычно не составляет труда уяснить, что имеется в виду¹³. Математики настолько привыкли черпать специальные термины из общеупотребительной лексики, что порой склонны отыскивать математический смысл в самых обычных словах.

Вот иллюстрация к сказанному. Механико-математический факультет Московского университета, 1950-е гг. Идёт научный семинар, руководимый знаменитым математиком Сергеем Львовичем Соболевым (сейчас его имя носит Институт математики Сибирского отделения РАН). До слегка задремавшего Соболева доносятся слова докладчика: «А теперь я должен ввести целый ряд обозначений». Соболев просыпается и спрашивает: «Простите, какой ряд вы называете целым?» (Для тех читателей, которые незнакомы с математическим термином «*ряд*», поясню, что в математике *рядом* называется последовательность из бесконечного числа членов, подлежащих суммированию.) В подобных случаях долг гуманитария – напомнить математику, что обычные слова имеют значения и за пределами математического жаргона.

Второй фактор заключается в том, что математический

¹³ Математикам, впрочем, иногда нравится обыгрывать указанную омонимию в каламбурах: *И до боли жаждет воли / Истомившийся от бега / По борелевскому полю / Измеримых по Лебегу*. Те множества, которые являются измеримыми по Лебегу, действительно образуют борелевское поле, но бежать по нему, разумеется, невозможно.

СМЫСЛ слова, заимствованного из естественного языка, может быть близок к обычному смыслу этого слова, но не совпадать с этим обычным смыслом. Так, математическое значение слова «угол» происходит от его обыденного значения, однако эти значения не совпадают даже в простейшем случае угла между двумя прямыми линиями (не говоря уже об угле комнаты): обыденное сознание вряд ли примирится с углом ноль градусов. В подобных случаях выбор правильного значения может оказаться затруднительным. Второй фактор глубже первого и предопределяется, по-видимому, тем, что занятия математикой и сопряжённое с ними систематическое использование точной терминологии накладывают свой отпечаток на психологию, по крайней мере в части восприятия слов. Этот фактор и проявился в нашем примере со словом «неподалёку».

Пожалуй, существует и третий фактор, не упомянутый нами по той причине, что он, возможно, обнаруживается лишь в отношении одного (но очень важного) слова. Фактор этот сводится к тому, что для обозначения одного важнейшего – и важнейшего не только для математики! – понятия в русском языке отсутствует нужное слово. В математике понятие, о котором идёт речь, обозначается словом «ложь».

Слово «ложь» происходит от глагола «лгать», каковой факт отражается в его словарном толковании: «неправда, намеренное искажение истины». Подчеркнём здесь слово «намеренное». Знаменитый «Энциклопедический словарь»

Брокгауза и Ефрона в одноименной статье прямо указывает на аморальность лжи:

Ложь – в отличие от заблуждения и ошибки – обозначает сознательное и потому нравственно предосудительное противоречие истине. Из прилагательных от этого слова безусловно дурное значение сохраняет лишь форма *лживый*, тогда как *ложный* употребляется также в смысле объективного несовпадения данного положения с истиною, хотя бы без намерения и вины субъекта; так, *лживый* вывод есть тот, который делается с намерением обмануть других, тогда как *ложным выводом* может быть и такой, который делается по ошибке, вводя в обман самого ошибающегося.

Мы видим, что значение русского существительного «ложь» непременно подразумевает субъекта и его злонамеренность. Но субъект со своими намерениями чужд математике.

Вместе с тем в математике ощущается острая потребность в слове, обозначающем любое неистинное утверждение. В качестве такового и выбрано слово «ложь». Таким образом, математики употребляют это слово, лишая его какой-либо нравственной оценки и отрывая от слова «лгать». Заметим, что английский язык располагает двумя словами для перевода русского слова «ложь»: это *lie* для передачи обычного, общеупотребительного, бытового его смысла, предполагающего сознательную злонамеренность, и *falsehood* для смысла

математического. Заметим также, что в русском языке существует слово, обозначающее любое истинное утверждение, вне зависимости от намерений, с которыми данное утверждение сделано. Это слово «истина». Можно сказать: «Дважды два четыре – это истина» – и при этом не иметь в виду никого, кто бы собирался кого-либо просветить. Но в математике можно сказать: «Дважды два пять – это ложь», не имея в виду никого, кто бы стремился кого-либо обмануть. (Вот тема для интересующихся философией языка: истина в русском языке объективна, а ложь – субъективна.)

VIII

Было бы замечательно, если бы математик был способен понимать точку зрения гуманитария, в значительной степени отражённую в языке гуманитария, а гуманитарий – точку зрения математика, в ещё большей степени отражённую в языке математика. И то и другое трудно. Ещё труднее не требовать признания одной из точек зрения единственно правильной. Таким образом, и гуманитариев, и математиков следует призвать сделать шаг навстречу друг другу. И начинать надо с преподавания, руководствуясь следующими словами А. Н. Колмогорова:

...Учитель (для конкретности – преподаватель математики) находится в том же положении, как учёный, приходящий **со своей проблематикой**

в уже существующий вычислительный центр с определённым набором вычислительных машин, запасом заготовленных (с другими целями!) программ, даже со штатом программистов. Задача его состоит в том, чтобы обучить этот сложный механизм выполнить новую работу, используя все свои уже заготовленные заранее механизмы, программы, навыки.

IX

Обсуждая вопрос о преподавании кому-либо чего-либо, полезно иметь представление о целях этого преподавания. Среди таких целей можно выделить две: 1) получение *образования*; 2) подготовка к *профессии*.

Следует заметить, что в ряде стран различие названных целей отчётливо отражено в организации образовательных учреждений. Так, в России разделение целей организационно оформлено на уровне среднего образования, во Франции – на уровне высшего. В современной России, как это было ещё в СССР, образование призваны давать *средние школы*; в СССР к профессии готовили *техникумы*, каковые в современной России переименованы, кажется, в *колледжи* (слава богу, что не в академии). Во Франции образование дают *университеты*, профессии же – так называемые *высшие школы* (*grandes écoles*), среди которых наиболее известны Высшая нормальная школа (*École normale supérieure*) и

Политехническая школа (*École polytechnique*). В университеты берут без экзамена всякого, лишь бы он проживал в данном регионе и имел надлежащую справку о среднем образовании; в высшие школы – суровый конкурс, и в них, по крайней мере в некоторых, платят приличную стипендию.

Х

Разумеется, грань между повышением общеобразовательного уровня и профессиональной подготовкой зачастую стирается. Скажем, знакомство с аксиоматическим методом значимо не только в плане общего образования.

Разъясним прежде всего, как в рамках этого метода трактуется слово «аксиома». В повседневном языке аксиома понимается, скорее всего, как утверждение настолько очевидное, что оно не требует доказательств. Однако авторитетный толковый словарь Ушакова вообще отрицает принадлежность слова «аксиома» повседневному языку, относя один из оттенков его значения к математике, а другой – к языку книжному¹⁴. Словари же иностранных слов – и словарь Крысина¹⁵, и словарь Захаренко и др.¹⁶ – если и впускают это

¹⁴ Положение, принимаемое без доказательств (*мат.*). || Очевидная истина, утверждение, принимаемое на веру (*книжн.*) (Толковый словарь русского языка / Под ред. Д. Н. Ушакова. – М., 1935–1940.).

¹⁵ Крысин Л. П. Толковый словарь иноязычных слов. – 2-е изд., доп. – М., 2000.

¹⁶ Захаренко Е. Н., Комарова Л. Н., Нечаева И. В. Новый словарь иностранных

слово в повседневный язык, то лишь в значении, квалифицируемом как переносное: «Бесспорное, не требующее доказательств положение». Основное же, даваемое первым значение слова «аксиома» эти словари толкуют сходным образом: «Исходное положение, принимаемое без доказательств и лежащее в основе доказательств истинности других положений» (словарь Крысина), «Отправное, исходное положение какой-либо теории, лежащее в основе доказательств других положений этой теории, в пределах которой оно принимается без доказательств» (словарь Захаренко и др.). Таким образом, в том своём значении, которое является основным для математиков, аксиомы трактуются не как положительные утверждения, а как формулировки предположений. В современной математике развитие какой-либо аксиоматической теории происходит следующим образом: предположим, что верно то, что записано в аксиомах, тогда окажется верным то-то и то-то.

Сущность аксиоматического метода останется непонятной без предъявления содержательных примеров. Сообщим поэтому, как выглядит фрагмент одной из аксиоматических систем для геометрии. Сперва объявляется, что существуют два типа объектов; объекты первого типа называются *точками*, объекты второго типа – *прямыми*. Что это за объекты, как они «выглядят», намеренно не объясняется. Далее декларируется, что существует некоторое отношение, называ-

емое *отношением инцидентности*, в которое могут вступать между собой отдельно взятая точка и отдельно взятая прямая. Что это за отношение, опять-таки не объясняется, сообщается лишь, что если даны точка и прямая, то они могут быть *инцидентны* друг другу, а могут быть и *не инцидентны*. Если точка инцидентна прямой, то говорят, что точка *лежит на* этой прямой, а прямая *проходит через* эту точку. Наконец, указываются свойства, соединяющие между собой вводимые сущности: в нашем случае – точки, прямые, отношение инцидентности. Формулировки таких свойств и называются в математике аксиомами, в нашем случае – *аксиомами геометрии*.

Для примера приведём три из аксиом геометрии. Первая: для любых двух точек существует прямая, проходящая через каждую из этих точек. Вторая: существуют три точки, не лежащие на одной прямой. Третья: для любой прямой и любой не лежащей на ней точки существует не более одной прямой, проходящей через эту точку, но не проходящей ни через одну из точек, лежащих на исходной прямой (эта аксиома называется *аксиомой о параллельных*). Эти три аксиомы вкупе с другими аксиомами, говорящими о свойствах точек, прямых и отношения инцидентности, а также о свойствах некоторых других объектов и отношений, позволяют развить науку, называемую геометрией. При этом никакими иными сведениями, кроме тех, которые записаны в аксиомах, пользоваться не разрешается.

Предпринимались попытки создать аксиоматику и для некоторых нематематических дисциплин, скажем для фонологии. В качестве исходных понятий брались такие объекты, как *звук языка* и *фонема*. В качестве исходных отношений – *отношение равносмысленности*, в каковом отношении могли находиться две цепочки звуков языка, и *отношение принадлежности*, в каковом отношении могли находиться звук языка и фонема. Одна из аксиом постулировала, что если при замене в какой-то цепочке звуков языка звука X звуком Y оказалось, что результирующая цепочка не равносмысленна исходной, то звуки X и Y не могут принадлежать одной и той же фонеме. (Эта аксиома называется *аксиомой минимальной пары*, поскольку пара цепочек, не являющихся равносмысленными и различающихся лишь тем, что в одной и той же позиции в них стоят разные звуки, называется *минимальной парой*.) Другая аксиома постулировала, что если, напротив, в любой цепочке звуков такая замена приводит к равносмысленной цепочке, то звуки X и Y непременно принадлежат одной и той же фонеме (эта аксиома называется *аксиомой свободного варьирования*, поскольку про звуки X и Y , во всех случаях допускающие замену одного другим, так что результирующая цепочка оказывается равносмысленной исходной, говорят, что они находятся в *отношении свободного варьирования*).

И геометрический, и фонологический примеры демонстрируют главное, что характеризует аксиоматический ме-

тод. Это главное состоит в следующем. Природа вводимых в рассмотрение предметов и отношений намеренно не разъясняется, они остаются *неопределяемыми*. Единственное, что про них предполагается известным, – это те связи между ними, которые записаны в аксиомах. Вся дальнейшая информация выводится из аксиом путём логических умозаключений. Таким образом, человек, собирающийся развивать теорию на основе сформулированных аксиом, должен сделать над собой психологическое усилие и забыть всё, чему его учили в школе по геометрии и в вузе по фонологии. Другое дело, что он ни в коем случае не должен забывать этого на стадии составления списка аксиом, коль скоро желает, чтобы эти аксиомы отражали реальность.

В обоих наших примерах невозможно было выделить из списка аксиом геометрии такие, которые характеризовали бы только точку, или только прямую, или только инцидентность. Аналогично среди аксиом фонологии невозможно выделить такие, которые характеризуют, скажем, только звук речи или только равносмысленность. Набор аксиом характеризует, как правило, исходные понятия не по отдельности, а в их совокупности – через объявление их связей между собой.

Аксиоматический метод может рассматриваться как один из способов введения новых понятий наряду с широко известными демонстрационным и вербальным.

Демонстрационный способ заключается в предъявлении

достаточного числа примеров, не только положительных, но и отрицательных. Желая, например, ввести понятие 'кошка', нужно показать достаточное количество кошек, но также, скажем, собак и кроликов, объясняя, что эти собаки и кролики не суть кошки.

Вербальный способ опирается на словесную дефиницию. Вот два примера вербального способа: 1) определение слова «хвоя» из толкового словаря Ушакова: «Узкий и упругий в виде иглы лист у некоторых пород деревьев»; 2) определение термина «простое число»: «Натуральное число называется простым, если оно, во-первых, больше единицы и, во-вторых, делится без остатка только на единицу и на само себя». (Интересно, кстати, сколько чисел, как простых, так и простыми не являющихся, надо предъявить, чтобы понятие простого числа могло быть усвоено демонстрационным способом?¹⁷)

Аксиоматический способ определения, скажем, понятия 'точка' предполагает определение этого понятия одновременно с понятиями 'прямая' и 'инцидентно'. Все эти три понятия определяются не порознь, а совокупно, через ту информацию о них, которая записана в аксиомах. Хотя записанная в аксиомах информация, очевидно, вербальна, аксиоматический способ существенно отличается от вербального. Ведь при вербальном способе новое понятие определяется

¹⁷ Задача для развлечения нематематика: продолжить последовательность чисел 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55;

через старые, уже известные; при аксиоматическом способе несколько новых понятий определяются друг через друга на основе тех соотношений, кои связывают их в аксиомах.

XI

Сходным образом изучение математических моделей реальных явлений позволяет осознать границы моделирования, задуматься над соотношением между моделью и моделируемой реальностью. Но помимо этой философской миссии изучение математических моделей явлений экономики, психологии или лингвистики позволяет и лучше понять сами моделируемые явления.

Можно согласиться с теми, кто не устаёт напоминать об ограниченности математических моделей. Действительно, когда говорят о точности такой модели, то подразумевают её точность как математического объекта, т. е. точность «внутри себя». Когда говорят о точности модели, речь не идёт о точности описания, т. е. о точном соответствии модели описываемому фрагменту действительности. Под ограниченностью математических моделей как раз и понимается их неспособность охватить описываемое ими явление во всей его полноте.

Однако нельзя согласиться с теми, кто в этой ограниченности видит их слабость. Скорее, в этом их сила. Математическая модель должна быть проста, а потому огрублена.

Проиллюстрирую сказанное примером. Всем известно, что Земля – шар. Те, кто получил некоторое образование, знают, что Земля – эллипсоид вращения, сдавленный у полюсов. Геодезисты уточняют, что Земля – геоид, иначе говоря, геометрическая фигура, поверхность которой совпадает с поверхностью Земли без учёта таких мелких деталей, как горы и т. п. (более точно, совпадает с той поверхностью, которую образовывал бы Мировой океан, если бы все материки и острова были бы залиты водой или, ещё более точно, были бы срезаны по уровню Мирового океана). Мы имеем здесь три математические модели, с возрастающей точностью описывающие моделируемый ими объект – форму планеты Земля. Важнейшая из этих моделей – первая, она же самая неточная. Хотя для прокладки авиамаршрутов нужна, возможно, и вторая, а для запуска баллистических ракет – даже третья.

Полное понимание реального строения окружающей нас Вселенной вряд ли когда-либо будет достигнуто. Однако именно математические модели приближают нас к такому пониманию и – это главное – объясняют, каким это строение *может быть*. А ведь если вдуматься, то понимание некоторых сторон устройства пространственно-временного континуума (а может, вовсе и не континуума, а чего-то дискретного) существенно для выживания человечества или, точнее, того, во что превратится человечество в далёком будущем.

Роль математической модели для представителя гумани-

тарной науки можно сравнить с ролью скелета для художника, рисующего человека. Художник не изображает скелет, скелет скрыт и от него, и от зрителя, но, чтобы грамотно изобразить человеческую фигуру, полезно представить её себе в виде скелета, обросшего плотью.

Так, гениальный математик Андрей Колмогоров очертил скелет понятия падежа, указав, в частности, основные исходные представления, необходимые для образования этого понятия (представления о синтаксически правильной фразе, о состоянии предмета, о выражении состояний предмета контекстами и т. п.). Гениальный лингвист Андрей Зализняк обросил этот скелет лингвистической плотью в своём знаменитом трактате «Русское именное словоизменение».

Тут самое время заметить, что скелеты представляют интерес главным образом для анатомов. И при всей пользе, которую художники могут извлечь из рисования скелетов, на картинах скелеты всё-таки изображают обросшими плотью.

В качестве поучительного отступления перескажу свой разговор с Ираклием Луарсабовичем Андрониковым. Я спросил, как ему удаётся не просто симитировать звучание голоса, но добиться портретного сходства с героями своих рассказов. Главное, объяснил он, ухватить и воспроизвести мимику, раз уж сходство геометрической формы недостижимо.

ХII

Из только что сказанного как будто напрашивается вывод, что главная цель обучения гуманитариев математике состоит в том, чтобы познакомить их с математическими моделями или хотя бы заложить фундамент для такого знакомства. Однако это не так.

Главная цель обучения гуманитариев математике лежит в области психологии. Эта цель заключается не столько в сообщении знаний и даже не столько в обучении методу, сколько в изменении – нет, не в изменении, а в *расширении* психологии обучающегося, в привитии ему строгой дисциплины мышления. (Слово «дисциплина» понимается здесь, разумеется, не в значении 'учебный предмет', а в смысле приверженности к порядку и способности следовать этому порядку.) Как сказал Ломоносов, «математику уже за то любить стоит, что она ум в порядок приводит».

Помимо дисциплины мышления я бы назвал ещё три важнейших умения, выработке которых должны способствовать математические занятия. Перечисляю их в порядке возрастания важности: первое – это умение отличать истину от лжи (понимаемой в объяснённом выше объективном, математическом смысле, т. е. без ссылки на намерение обмануть); второе – это умение отличать смысл от бессмыслицы; третье – это умение отличать понятное от непонятного.

Вливание элементов математической психологии в сознание гуманитариев (недруги такого вливания назвали бы его индоктринизацией, а то и интоксикацией) может осуществляться как в *прямой* форме – путём обучения в классах и аудиториях, так и в форме *косвенной* – путём проведения совместных исследований, участия математиков в проводимых гуманитариями семинарах и т. п.

К косвенным формам влияния относятся даже вопросы, задаваемые математиками на лекциях на гуманитарные темы. Здесь на память приходит известный случай из истории психологии. В конце XIX в. в одной из больших аудиторий Московского университета была объявлена лекция на тему «Есть ли интеллект у животных?». Просветиться собралось несколько десятков, а то и сотен слушателей. Председательствовал заслуженный ординарный профессор математики Московского университета Николай Васильевич Бугаев – президент Московского математического общества (с 1891 по 1903 г.) и отец Андрея Белого. Перед началом доклада он обратился к аудитории с вопросом, знает ли кто-либо, что такое интеллект. Ответ оказался отрицательным. Тогда Бугаев объявил: поскольку никто из присутствующих не знает, что такое интеллект, лекция о том, есть ли он у животных, состояться не может. Это типичный пример косвенного воздействия математического мышления на мышление гуманитарное. Подобные формы воздействия также являются одним из элементов математического образования.

За последние полвека заметно уменьшилось количество непонятных или бессмысленных утверждений в отечественной литературе по языкознанию. Полагаю, что произошло это не без влияния – как прямого, так и главным образом косвенного – математики.

Случается, впрочем, и языковедам поправлять математиков. Наиболее существенную из таких поправок осуществил в отношении математика Фоменко лингвист Зализняк¹⁸.

Разумеется, математики не претендуют на то, чтобы разрешить проблемы, возникающие в гуманитарных науках (хотя, как уже говорилось выше, именно математику Колмогорову принадлежит первое научное определение лингвистического понятия 'падеж'). Но они помогают гуманитариям лучше уяснить суть этих проблем и критически отнестись к попыткам их решения.

Роль математики в подготовке гуманитариев можно сравнить с ролью строевой подготовки в обучении воина. Все эти ружейные артикулы, повороты, строевой шаг и иные движения, которым обучают молодого бойца, вряд ли находят применение в реальном бою. Но во всех армиях мира они рассматриваются как необходимая основа всякого военного обучения, поскольку приучают выполнять команды. (Кстати, оперирование с математическими алгоритмами также при-

¹⁸ Зализняк А. А. Лингвистика по А. Т. Фоменко // Успехи математических наук. 2000. Т. 55. Вып. 2. С. 162–188. И подробнее: Зализняк А. А. Из заметок о любительской лингвистике. – М., 2009. – 240 с.

учает выполнять команды. «Сначала я вам скажу, что я делаю, а [только] потом объясню зачем» – это программное за- явление содержится в одной из книг по методике математи- ки.)

Строевая подготовка тренирует дисциплину – только не дисциплину мышления, как это делает математика, а дисци- плину действий.

Другая аналогия – тренировка моряков на парусных су- дах. Не знаю, как сейчас, но во времена моей молодости вся- кий, кто обучался в гражданских мореходных вузах, в обя- зательном порядке проходил плавание на парусниках – и это при том, что применять полученные навыки хождения под парусом впоследствии ему вроде бы не приходилось. Тем не менее обучение этим навыкам считалось (а может быть, и считается до сих пор) необходимой частью морской подго- товки, необходимым тренингом. Сходным тренингом – тре- нингом мышления, наведением порядка в мозговых извили- нах – служат занятия математикой.

XIII

Спросите «человека с улицы», в чём состоит аксиома о па- раллельных прямых и в чём заключается открытие Лобачев- ского. Эксперимент показывает, что на первый вопрос ответ будет в большинстве случаев таким (причём и в России, и в Америке): аксиома состоит в том, что параллельные пря-

мые не пересекаются. А в ответ на второй вопрос вам, скорее всего, скажут: Лобачевский доказал, что параллельные прямые пересекаются. При этом отвечающий, как правило, знает, что прямые *называются* параллельными, если они лежат в одной плоскости и *не пересекаются*. В значительном числе случаев ответившего можно убедить в ошибочности обоих ответов. В случае вопроса об аксиоме многие (но не все!) понимают, что коль скоро слово «параллельные» – это синонимичное название для непересекающихся прямых, то объявлять непересекаемость параллельных аксиомой довольно бессмысленно. (Это всё равно как объявить такую аксиому: «Всякий красный предмет является красным». Впрочем, осязаемое количество людей не имеют ничего против такой аксиомы.) Что до открытия Лобачевского, то, в чём бы оно ни состояло, ясно, что прямые линии, называемые параллельными, пересечься не могут.

Вопрос про аксиому о параллельных прямых не является, разумеется, вопросом на испытание памяти. Точно так же вопрос об открытии Лобачевского не является вопросом на проверку эрудиции. Оба вопроса – на понимание смысла делаемых утверждений. Строго говоря, вся ситуация лежит здесь не в сфере математики, а в сфере упоминавшейся выше логики русского или иного естественного языка. И это довольно типично: значительная часть того, что происходит на уроках математики для гуманитариев, как раз и должна, по нашему разумению, состоять в обсуждении этой логики, а

отчасти и в обучении ей. Математики впитывают семантику неосознанно, поскольку занятия математикой невозможны без чётко сформулированных утверждений. Столь же неосознанно у гуманитариев семантика размывается – не без влияния расплывчатых текстов гуманитарных наук. (И для гуманитария такая размытость семантики зачастую необходима.)

Диалог математика с гуманитарием о параллельных прямых мы считали бы полезным и поучительным для обеих сторон. Вот ещё пример такого полезного и поучительного диалога:

Математик. Возьмём прямую линию и точку на ней. Существует ли на этой прямой точка, ближайшая к нашей точке и лежащая справа от неё?

Гуманитарий. Да, существует.

Математик. Вы не возражаете, если исходную точку мы обозначим буквой A , а ближайшую к ней справа буквой B ?

Гуманитарий. Не возражаю.

Математик. Вы согласны с тем, что любые две различные точки можно соединить отрезком?

Гуманитарий. Согласен.

Математик. Значит, можно соединить точки A и B и получить отрезок AB . Правильно?

Гуманитарий. Правильно.

Математик. А согласны ли вы с тем, что всякий отрезок имеет середину?

Гуманитарий. Согласен.

Математик. Значит, и у отрезка AB есть середина. Но ведь эта середина явно ближе к точке A , чем точка B . Меж тем точка B – ближайшая к A . Как быть?

(Гуманитарий не знает, что сказать.)

Математик. Я лишь хотел обратить ваше внимание, что не могут одновременно быть истинными все три утверждения о существованиях: «Для всякого отрезка существует его середина», «Любые две различные точки можно соединить отрезком» и «Для точки на прямой линии существует ближайшая к ней точка справа».

Надо признать, впрочем, что ответ «Да, существует» на вопрос о ближайшей точке даётся хотя и весьма часто, но всё же реже, чем приведённые выше ответы о сущности аксиомы о параллельных и открытии Лобачевского.

Результатом диалога о ближайшей точке должно стать отнюдь не только уяснение гуманитарием того, что для данной точки не существует ближайшей к ней точки справа; несуществование такой точки – это, в конце концов, всего лишь математический факт. Не менее, а скорее даже более важным является уяснение математиком тех деталей психологии гуманитария, которая заставляет его считать, что такая точка существует.

Дело в том, что представление о 'ближайшем' формируется у гуманитария (как и у всякого человека) не на основе изучения такого сложного образования, как континуум точек

на прямой, а на основе наблюдений материальных предметов окружающего мира. Наблюдение же, скажем, окон дома или кресел в театральном зале не оставляет сомнений в наличии ближайшего справа окна или кресла. (Предвидя ехидное возражение мелочного педанта, прибавим: если только исходное окно или кресло не является крайним.)

Из сказанного можно сделать такое заключение: наш пример с ближайшей точкой есть конкретное проявление некоей общей трудности, имеющей философский характер. Трудность состоит в следующем. Математика изучает идеальные сущности (каковыми являются, в частности, точки), но обращается с ними, как если бы они были реальными предметами физического мира (например, применяет к точкам понятие 'ближайший'). Но в таком случае математик обязан отдавать себе отчёт в том, что подобный квазиматериальный подход к абстракциям, если не сделать специальных оговорок, влечёт за собой перенесение на эти абстракции шлейфа представлений, которые абстракциям не свойственны, а заимствуются из обращения с физическими предметами.

Что до упомянутых «специальных оговорок», они делаются явно, а подсознательно впитываются математиками в процессе их обучения. В случае точек на прямой указанный шлейф включает в себя представление о точках на прямой как о мельчайших бусинах, нанизанных на натянутую нить. Разумеется, в рамках такого представления естественно предполагать наличие ближайшей точки и даже быть уве-

ренным в её наличии.

Порядок точек на прямой является в математической терминологии *плотным порядком*; термин «плотный» означает, что для любых двух участвующих в этом упорядочении объектов, каковыми в данном случае служат точки прямой, найдётся объект (в данном случае точка) между ними. В окружающем нас материальном мире плотных порядков не встречается.

Вот другой пример на ту же тему. Одной из математических абстракций является пустое множество. Само понятие 'множество', подобно понятию 'натуральное число', представляет собой одно из первичных, неопределяемых математических понятий, познаваемых из примеров. Синонимом математического термина «множество» является слово «совокупность»; объекты, входящие в какую-либо совокупность, она же множество, называются её (соответственно его) *элементами*.

Слово «множество» может навести на мысль, что в множестве должно быть много элементов, тем более что главное, общеупотребительное значение этого слова действительно выражает данную мысль, как, например, во фразе «Можно указать множество причин...». Эта ложная мысль разрушается уже заявлением, что «множество» (в математическом смысле) и «совокупность» суть синонимы: ведь количество элементов в совокупности может быть и малым. Заметим, кстати, что переводы термина «множество» на французский

(ensemble) и на английский язык (set) не содержат идеи 'много'.

Зададимся теперь вопросом, может ли совокупность состоять из одного элемента. Математик ответит категорическим «да». Для гуманитария же минимально возможное количество элементов совокупности – это два. Но математики свободно оперируют и *пустым множеством*, вовсе не содержащим элементов. На занятиях по математике гуманитарии быстро усваивают это понятие (в частности, соглашаются, что пустое множество единственно: пустое множество крокодилов и пустое множество планет – это одно и то же множество).

Для математика наименьшим числом, служащим ответом на вопрос «Сколько?», является ноль, для нематематика – один. Скажем, если в зоопарке всего лишь один слон, то число один будет естественным ответом на вопрос «Сколько слонов в этом зоопарке?». Хотя нематематик признает число ноль верным ответом на вопрос «Сколько в этом бассейне крокодилов?» и даже, возможно, сам даст подобный ответ, но всё же он, скорее, ответит: «Да нет тут никаких крокодилов!» И уж точно не задаст вопрос «Сколько?», не спросив предварительно: «Есть ли в этом бассейне крокодилы?» – и только после положительного ответа спросит, сколько их.

Как в примере с точками, так и в примере с пустым множеством общение математика с гуманитарием оказывается более поучительным для первого, потому что заставляет его

осознать: он, математик, даже в таких простых, казалось бы, вопросах, ушёл в мир абстрактных сущностей и тем самым удалился от общечеловеческого словоупотребления и образа мыслей.

Поэтому математику негоже с высокомерием относиться к высказываниям гуманитария. Напротив, ему полезно осознать, что он приписывает абстракциям свойства, которые в жизни не встречаются. Заметим, что именно неограниченное, а потому незаконное перенесение на математические абстракции слов и смыслов, заимствованных из реальной жизни, и приводит в конце концов к *математическим парадоксам*, а именно к так называемым парадоксам теории множеств. Эти парадоксы появляются там, где с чрезвычайно высокими абстракциями начинают обращаться как с реальными предметами.

Заметим, что ту же, по существу, природу – природу незаконного перенесения – имеют и парадоксы, которые окрестили *логическими*, хотя правильнее было бы называть их *лингвистическими*. Так мы и будем их называть. Как только что отмечалось, математические парадоксы возникают при попытке оперировать с математическими сущностями путём использования общеупотребительной лексики. Лингвистические парадоксы возникают, напротив, при попытке оперировать с общеупотребительными словами так, как если бы они выражали точные математические понятия. Общеупотребительные слова, как правило, имеют расплывчатый

смысл, и попытка придания им точного смысла как раз и приводит к парадоксам. Рассмотрим для ясности три известных лингвистических парадокса.

Парадокс кучи. Это один из самых известных и древних парадоксов. Ясно, что если из кучи песка удалить одну песчинку, то оставшееся всё ещё будет кучей. Но ведь, повторив данную операцию достаточное количество раз, мы дойдём до одной-единственной песчинки, каковая кучу не образует. Где же граница между кучей и не кучей? Ответ очевиден: слово «куча» имеет расплывчатый смысл, и потому искать точные границы этого смысла бесполезно.

Парадокс наименьшего числа. Возьмём «наименьшее натуральное число, которое не допускает определения посредством фразы, содержащей менее ста слов». С одной стороны, это число не допускает определения посредством менее ста слов. С другой стороны, взятая в кавычки фраза является его определением, причём таким, которое содержит менее ста слов. Разгадка в том, что мы обращаемся с выражением «определять натуральное число» так, как если бы оно имело точный смысл, какового в действительности оно не имеет. Достаточно задаться вопросом, какие слова можно использовать в определении. Можно ли, например, употреблять названия редких растений, известные лишь узкому кругу ботаников, или специальные математические термины, или собственные имена людей (притом что каждое такое имя принадлежит, как правило, нескольким людям)? Наш

парадокс как раз и показывает, что обсуждаемому выражению точный смысл придать невозможно.

Парадокс гетерологичности. Назовём прилагательное *гомологическим*, если оно обладает тем свойством, которое это прилагательное выражает; в противном случае назовём его *гетерологическим*. Примеры: прилагательное «многосложный» само многосложно и потому является гомологическим; прилагательное «односложный» не односложно и потому является гетерологическим. Гомологично или гетерологично прилагательное «гетерологический»? Если оно гомологично, то, значит, обладает свойством, которое выражает, а свойство это – 'гетерологичность'; значит, рассматриваемое прилагательное гетерологично. Если же оно гетерологично, то, обладая выражаемым им свойством гетерологичности, должно квалифицироваться как гомологическое. Всё дело в том, что слова «гомологический» и «гетерологический» не обладают точным смыслом, в презумпции которого происходит рассуждение. Толкование этих слов опирается на толкование словосочетания «свойство, выражаемое прилагательным», а при толковании этого словосочетания возникают значительные трудности. Возьмём для примера прилагательное «простой». Возможно ли недвусмысленно указать свойство, выражаемое этим прилагательным? Где граница между простыми и непростыми сущностями? И обладают ли этим свойством простые дроби, простые числа, простые вещества, простые эфиры и василистник простой

(растение семейства лютиковых)?

XIV

Вернёмся, однако, к тому, чем математика может быть полезна всем, в частности гуманитариям.

Воспитываемая на уроках математики дисциплина мышления помогает в числе прочего отчетливо разграничивать и различать истину и ложь (в вышеуказанном – математическом – значении последнего слова), доказанное и всего лишь гипотетическое, ведь нигде эти различия не проявляются с такой чёткостью, как в математике.

Автору очень хочется сказать, что математика – единственная наука, где достигается абсолютная истина, но он всё же на это не решается, так как подозревает, что абсолютная истина не достигается нигде.

В любом случае математические истины ближе к абсолютным, чем истины других наук. Поэтому математика – наилучший полигон для тренировки на истину. Истина – основной предмет математики.

Духовная культура состоит не столько в знаниях, сколько в нормах. Нормы проявляются прежде всего в противопоставлениях. Эстетика учит нас противопоставлению между прекрасным и безобразным, высоким и низким. Этика – между должным и недолжным, между нравственным, моральным и безнравственным, аморальным. Юриспруден-

ция – между законным, правовым и незаконным, неправовым. Логика – между истинным и ложным.

Но логика сама по себе не создаёт истин. Её законы носят условный характер: если то-то и то-то истинно, то неизбежно истинно то-то и то-то. (Точно так же теория вероятностей не назначает и не может назначать вероятности того или иного события, а лишь указывает, как по одним вероятностям вычислять другие. Например, она не утверждает, что при подбрасывании монеты выпадение двух орлов подряд имеет вероятность одна четвёртая; она утверждает лишь, что если при одном броске выпадение орла имеет вероятность одна вторая и если результаты бросков не зависят друг от друга, то выпадение двух орлов подряд имеет вероятность одна четвёртая.) Знаменитый силлогизм про смертность бедного Кая не утверждает, что Кай смертен, а утверждает лишь, что если все люди смертны и если Кай – человек, то и он, Кай, смертен.

Истину же поставляют конкретные науки, в том числе математика. Кажется, это ставит математику на одну доску с другими науками. Но нет, это не так: её и только её истины могут претендовать на приближение к абсолюту, и они если не «совершенно», то «почти» абсолютны.

Приходится, однако, признать – математику со вздохом, гуманитариию с удовлетворением, – что в этой приближённости математических истин к абсолютным состоит некоторая ограниченность математики. Потому что тот мир, который

дан нам в ощущениях, более адекватно отображается скорее в истинах, достаточно далёких от абсолютных.

Даже почитавшиеся незыблемыми законы Ньютона оказались пригодны лишь для сравнительно узкой полосы между микро- и макромирами, а вне этой полосы они требуют замены законами теории относительности.

Что уж говорить о так называемых прописных истинах гуманитарной сферы, будь то истины моральные или эстетические, которые с трудом поддаются, а то и вообще не поддаются оценке в терминах «верно» и «неверно».

XV

Казалось бы, что может быть важнее и первичнее, чем умение отличать истинные высказывания от высказываний ложных? Однако ещё более важным, ещё более первичным является умение отличать осмысленные высказывания от бессмысленных.

Вот характерный пример бессмысленного высказывания: «Рассмотрим совокупность *всех* слов, имеющих хотя бы одну общую букву». Это заявление бессмысленно, поскольку такой совокупности не существует. В самом деле, «рот» и «сыр» имеют общую букву «р» и потому должны принадлежать этой совокупности. Слово «око» должно принадлежать этой совокупности, поскольку имеет общую букву со словом «рот», и не должно ей принадлежать, поскольку не имеет об-

щих букв со словом «сыр».

Мы потому назвали пример характерным, что подобные псевдоконструкции, ничего на самом деле не конструирующие, были довольно типичны для литературы по языкознанию несколько десятилетий назад. Возникало даже парадоксальное удовлетворение, когда некоторое утверждение можно было квалифицировать всего лишь как ложное. Чувство удовлетворения возникало потому, что ложность утверждения свидетельствовала о его осмысленности.

Преподавателю-математику, ведущему диалог со студентом-гуманитарием, зачастую приходится просить студента вдуматься в то, что тот только что сказал, и затем спрашивать, понимает ли студент, что сказал. Не столь уж редко честные студенты, поразмыслив, в некоторой растерянности признаются, что не понимают.

Когда знаменитого педиатра доктора Спока спросили, с какого возраста следует воспитывать ребёнка, он, узнав, что ребёнку полтора месяца, ответил: «Вы уже опоздали на полтора месяца». Не следует ли способность отличать осмысленное от бессмысленного и истинное от ложного неназойливо прививать уже с начальных классов школы? И не является ли это главным в школьном преподавании?

Надо сказать, что квалификация высказывания как ложного, бессмысленного или непонятного, как правило, требует некоторого усилия – иногда почти героического. Как же так, уважаемый человек что-то говорит или пишет, а ты

осмеливаешься его не понимать или, поняв, возражать? Не все и не всегда способны на такое усилие.

XVI

Способность к усилию, о котором только что говорилось, вырабатывается (во всяком случае должна вырабатываться) на уроках математики и при общении с математиками. Дело в том, что математика – наука по природе своей демократическая. На её уроках воспитывается (а при косвенном воздействии – прививается) демократизм.

Внешние формы такого демократизма произвели большое впечатление на автора этих строк в его первые студенческие годы, когда в конце 1940-х гг. он стал обучаться на знаменитом мехмате – механико-математическом факультете Московского университета. Если почтенный академик обнаруживал, что выступающий вслед за ним студент собирается стереть с доски им, академиком, написанное, он с извинениями вскакивал с места и стирал с доски сам. Для профессора мехмата было естественно самому написать и вывесить объявление, но не для профессора гуманитарного факультета.

Эти внешние проявления косвенно отражают глубинные различия. Ведь математическая истина не зависит от того, кто её произносит – академик или школьник. При этом академик может оказаться неправ, а школьник – прав.

Реакция Колмогорова на третьекурсника, опровергнувшего его на лекции, была такова: он пригласил студента к себе на дачу, там покатался с ним на лыжах, накормил обедом и взял себе в ученики.

С горечью приходится признать, что подобный демократизм имеет свои издержки, на что указывает Андрей Анатольевич Зализняк:

Мне хотелось бы высказаться в защиту двух простейших идей, которые прежде считались очевидными и даже просто банальными, а теперь звучат очень немодно.

1. Истина существует, и целью науки является её поиск.

2. В любом обсуждаемом вопросе профессионал (если он действительно профессионал, а не просто носитель казённых титулов) в нормальном случае более прав, чем дилетант.

Им противостоят положения, ныне гораздо более модные:

1. Истины не существует, существует лишь множество мнений (или, говоря языком постмодернизма, множество текстов).

2. По любому вопросу ничьё мнение не весит больше, чем мнение кого-то иного. Девочка-пятиклассница имеет мнение, что Дарвин неправ, и хороший тон состоит в том, чтобы подавать этот факт

как серьёзный вызов биологической науке¹⁹.

Чем наука дальше от математики, чем она, так сказать, гуманитарнее, тем сильнее убедительность того или иного высказывания начинает зависеть от авторитета высказывающего лица. На гуманитарных факультетах подобная персонализация истины ещё недавно ощущалась довольно сильно. «Это верно, потому что сказано имярек» или даже «Это верно, потому что сказано мною» – такие категорические заявления, высказанные в явной или чаще неявной форме, не столь уж редки в гуманитарных науках. (И имярек в первой фразе, и первое лицо во второй фразе обычно относились как раз к одному из тех «носителей казённых титулов», о которых говорит Зализняк.)

В естественных науках и в математике подобные заявления невозможны. Впрочем, в тоталитарном обществе принцип верховенства мнения того, кто на должность авторитета назначен властью, применялся с печальными последствиями и к естественным наукам – достаточно вспомнить лысенковщину. Проживи Сталин дольше, возможно, изменению подверглась бы и таблица умножения. Предпринимались же попытки отменить теорию относительности.

Нет в математике и «царского пути». Здесь я ссылаюсь на известную историю, то ли подлинную, то ли вымышленную, которую одни рассказывают про великого математика Архи-

¹⁹ Зализняк А. А. Похвала филологии. М., 2007. С. 79. А также: Зализняк А. А. Из заметок о любительской лингвистике. М., 2009. С. 210.

меда и сиракузского царя Гиерона, другие про великого математика Евклида и египетского царя Птолемея.

Царь изъявил желание изучить геометрию и обратился с этой целью к математику. Математик взялся его обучать. Царь выразил недовольство тем, что его учат совершенно так же, в той же последовательности, как и всех других, не принимая во внимание его царский статус, каковой особый статус, по мнению царя, предполагал и особый способ обучения. На что математик, по преданию, ответил: «Нет царского пути в геометрии».

Эпилог

Первоначальный вариант этого очерка был напечатан в 2007 г. в декабрьском номере журнала «Знамя». Даже самые доброжелательные критики не могли не предъявить автору упрёка в односторонности. Хотя и чувствуется, говорили они, что автор желает примирить «физиков» и «лириков» на основе презумпции равенства сторон, но на деле из этого ничего не получилось. Сколь бы благими ни были намерения автора, декларируемое им преодоление барьера вылилось в агрессию математики: математическое проламывает барьер и, вторгшись на территорию гуманитарного, начинает устанавливать там свои порядки.

Такое положение вещей автору определённо не нравилось и, главное, не отвечало его замыслу. Автор стал размышлять,

почему так сложилось. Результатами своих размышлений он и хотел бы поделиться с читателем в эпилоге.

Дело в том, что слова «математик» и «гуманитарий» употребляются в тексте в двух значениях или смыслах. Эти смыслы не указаны явно, но при желании легко извлекаются из контекста. Первое (прямое, терминологическое) значение подразумевает математика и гуманитария как носителей определенных профессий, второе (переносное, бытовое) – как обладателей характерного для этих профессий склада мышления. В своём переносном значении слова «математик» и «гуманитарий» имеют значительной большой объём, поскольку первое слово включает в себя уже не только профессиональных математиков, но и просто людей с математически ориентированными мозгами; а второе распространяется почти на всех остальных представителей человеческого рода.

Каждая из двух трактовок – и строгая, и расширительная – намечает своё направление преодоления барьера. Иными словами, выбор трактовки определяет, с какой стороны происходит или должно происходить преодоление: математическое влияет на гуманитарное, его математизируя, или же, напротив, гуманитарное влияет на математическое, его гуманизируя.

Математик в широком смысле этого слова вряд ли поможет широко понимаемому гуманитария, но вот как профессионал профессионалу может помочь. Только не следует по-

нимать это в вульгарном смысле: мол, математик – это ментор, который с высоты своего величия подаёт гуманитарии непрошенные советы. Говоря здесь о математике, мы скорее имеем в виду абстрактную персонификацию математического. Математическое же может проявляться в разных формах, в том числе и в виде реального лица, в пессимальном случае действительно, увы, ментора, а в случае оптимальном – доброжелательного критика, обращающего внимание гуманитарного исследователя на неясности, нелогичности или неточности. Наилучший результат математического влияния, к которому надлежит стремиться, состоит в усвоении гуманитарием дисциплины мышления, о которой шла речь в настоящем очерке, в пестовании им некоего «внутреннего математика», математического начала в своём мозгу. (Теоретически дисциплина мышления должна вырабатываться на уроках математики в школе, практически же этого не происходит, поскольку математика редко когда преподаётся интересно, да и вообще преподаётся не та математика, которой следовало бы обучать школьников.)

Гуманитарий же, напротив, вряд ли поможет математику в его профессиональной деятельности, но способен прямо или косвенно приобщить его к общепринятым нормам выстраивания и интерпретации синтаксических конструкций. Например, тем, которые требуют учитывать контекст («предлагаемые обстоятельства», как сказал бы Станиславский) и предписывают купить не десять батонов, а десять яиц. А

также к нормам словоупотребления: например, употребление слова «неподалёку».

Возможно, слово «норма», даже с эпитетом «общепринятая», здесь слишком узко. Потому что, скажем, рекомендации по составлению инструкций вряд ли поддаются жесткой регламентации, предполагаемой термином «норма». Ведь одна из главных рекомендаций состоит в том, что текст инструкции должен быть лёгок для понимания, а именно этой лёгкости была лишена электоральная инструкция, о которой мы говорили выше. Безупречная с точки зрения синтаксиса и семантики, а потому полностью устраивающая математиков (в широком смысле слова), она оказалась, как выявила практика, трудна для понимания гуманитариями (опять-таки в широком смысле слова), а значит, неудачна. Лингвист сказал бы, что текст инструкции неудовлетворителен с точки зрения прагматики.

Конец ознакомительного фрагмента.

Текст предоставлен ООО «ЛитРес».

Прочитайте эту книгу целиком, [купив полную легальную версию](#) на ЛитРес.

Безопасно оплатить книгу можно банковской картой Visa, MasterCard, Maestro, со счета мобильного телефона, с платежного терминала, в салоне МТС или Связной, через PayPal, WebMoney, Яндекс.Деньги, QIWI Кошелек, бонусными картами или другим удобным Вам способом.